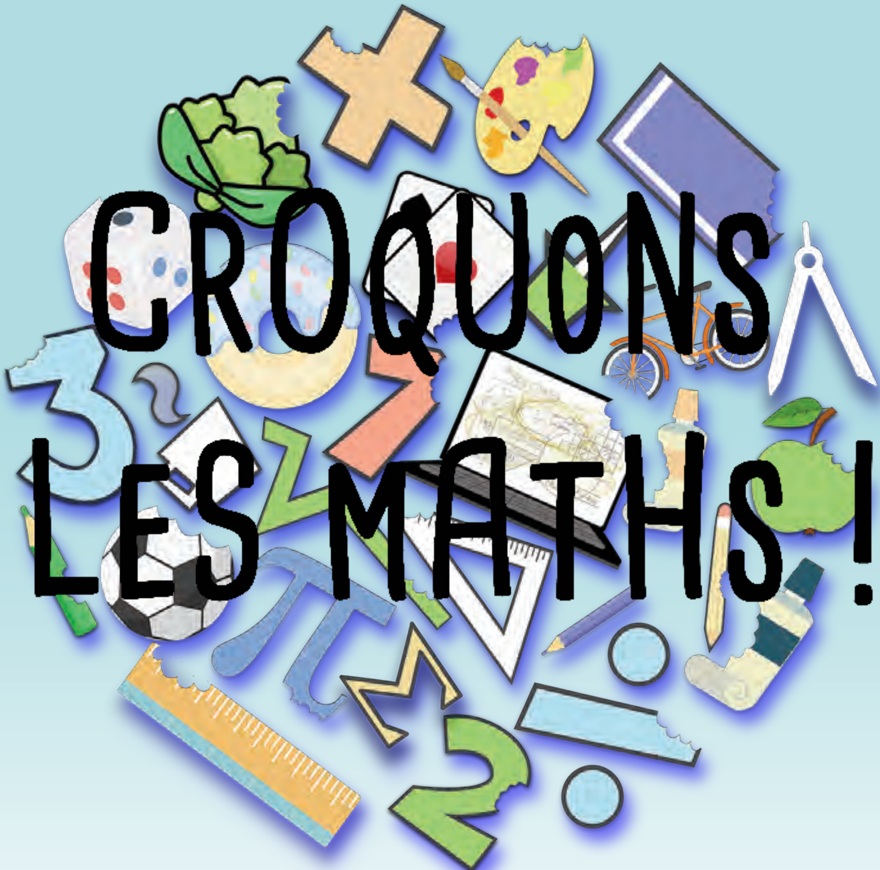
MATHS EXPRESS

CROQUONS LES MATHS !



Sommaire

Retrouvez *Croquons les Maths Express* et son complément d'enquête : Le jeu, un modèle pour les mathématiques de Jean-Baptiste Aubin et Olivier Druet sur www.cijm.org.

Sir Roger Penrose

Un parrain d'exception pour le 22e Salon Culture et jeux mathématiques

par Édouard Thomas
Mathématicien et journaliste scientifique

À conditions exceptionnelles, salon exceptionnel et parrain exceptionnel ! Qui mieux que Sir Roger Penrose personnifie en effet à la fois le plaisir de s'adonner à la science et le bonheur de transmettre les connaissances acquises durant une carrière prestigieuse ? Le sémillant mathématicien et physicien britannique incarne en fait beaucoup plus que ça. Il participe avec une patience, une ténacité, une énergie et une générosité qui forcent l'admiration à une expérience collective qui transcende toutes les barrières et fait fi des frontières intellectuelles. Il a inspiré Stephen Hawking et a travaillé avec lui. S'amuser avec des objets impossibles (lire dans les pages qui suivent l'interview qu'il nous a accordée), imaginer des pavages apériodiques originaux ou étudier les insaisissables trous noirs pour savoir « s'ils sont vraiment là » ou s'il ne s'agit que de chimères théoriques, tout relève pour lui de la même démarche enthousiaste, passionnée et inspirée.

Pour le côté « sérieux », nous sommes servis : Roger Penrose est un expert du calcul tensoriel et des équations de la relativité générale, introduites par Albert Einstein et dont on a, en 2015, célébré le centenaire. Depuis dix ans, elles connaissent un nouvel âge d'or. La détection des premières ondes gravitationnelles a été un choc. Les récents travaux sur la stabilité des trous noirs sont particulièrement spectaculaires (les derniers, dus à Sergiu Klainerman et Jérémie Szeftel, datent de fin avril). Un prix Nobel de physique, en 2020, a été décerné à Roger Penrose pour *« la découverte que la formation d'un trou noir est une prédiction robuste de la théorie de la relativité générale »*. Cela amuse l'intéressé, qui nous faisait remarquer lors d'un entretien, le samedi 2 janvier dernier : *« Là n'est pas ma découverte ! Ce que j'ai montré, c'est que les singularités sont une prédiction robuste de la relativité générale. Et vous avez besoin de la " censure cosmique " pour affirmer que vous parlez de trous noirs. »* Énoncées dans les années 1970, les conjectures de la censure cosmique occupent toujours les chercheurs : voilà, parmi d'autres, une contribution visionnaire majeure de notre parrain à la science. Olivier Graf nous ouvre les portes de cet univers dans cette brochure.

Dans un registre plus « ludique » ou « récréatif » en apparence, Roger Penrose est bien connu pour ses travaux sur les figures impossibles et sur les pavages apériodiques. Là aussi, ses recherches ont trouvé des applications scientifiques et technologiques inattendues (que ce soit en théorie des quasi-cristaux ou pour le traitement des images bruitées).

La raison pour laquelle Sir Roger Penrose a accepté de s'engager dans l'aventure du Salon « Culture et Jeux mathématiques » 2021 est que notre dynamique parrain, qui fêtera ses 90 ans cet été, est resté un formidable passeur de sciences. Auteur d'ouvrages remarquables (dont *l'Esprit, l'Ordinateur et les Lois de la physique*, Interéditions, 1993), dessinateur de talent, orateur d'exception, le charismatique mathématicien est généreux de son temps et de ses idées. Il raconte toujours avec le même plaisir la magie de la découverte, le moment où naît l'émerveillement, l'instant où jaillit l'étincelle de la compréhension, comme en témoigne Quentin Lazzarotto dans son article. Il partage sans compter ses idées et ses réflexions, et encourage tout un chacun, les jeunes en particulier, à le rejoindre dans la grande aventure de la science. Avec des projets pour les décennies à venir, Roger Penrose croque les mathématiques à pleines dents !

É. T.

Sir Roger Penrose lors d'une conférence à l'Institut Henri-Poincaré à Paris en 2015.

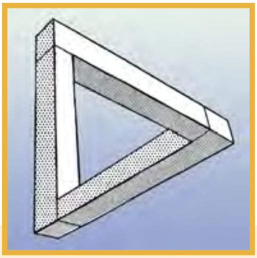
Les maths des figures impossibles avec Sir Roger Penrose

propos recueillis par Édouard Thomas
Mathématicien et journaliste scientifique

Roger Penrose est le parrain de l'édition 2021 du Salon culture et jeux mathématiques. Il revisite dans cet entretien certains de ses travaux relatifs aux figures impossibles, à la géométrie et à l'art.

É.T. : Faisons commencer notre voyage dans le monde des figures impossibles avec la publication du fameux *triangle de Penrose*. Nous sommes en 1958. Or, un objet similaire se trouve dès les années 1930 dans l'œuvre de l'artiste suédois Oscar Reutersvärd (1915 – 2002). Aviez-vous connaissance de son travail ?

R.P. : Dans l'œuvre de Reutersvärd, en fait ce sont des cubes empilés sous la forme des barres rigides, mais il s'agit essentiellement de la même figure impossible, de la même illusion. Je n'avais pas entendu parler de son œuvre. Je ne me souviens plus à quel moment quelqu'un, sans doute un Suédois, m'a mentionné son travail, avant l'édition d'une série de timbres commémoratifs. Reutersvärd s'est aussi amusé avec des escaliers un peu compliqués. Mais je n'avais pas connaissance de son œuvre.



À gauche, le triangle de Penrose (ou « tribarre »), tel que publié en 1958 par Roger Penrose et son père, Lionel Penrose, célèbre généticien.

À droite, les timbres suédois émis en 1982 en hommage à Oscar Reutersvärd.

En fait, c'est un bel exemple de cohomologie *[voir encadré page 5]*, je m'en suis aperçu plus tard. Je peux vous raconter l'histoire. Il y a bien longtemps, j'étais impliqué dans un programme télévisé britannique consacré à la théorie des *twisteurs [la grande théorie à laquelle Roger Penrose se consacre depuis la fin des années 1960, qui vise à réconcilier la gravitation et la mécanique quantique]*. À un moment, ils m'ont demandé à quel point cette théorie est «la bonne». Que peut-on faire avec la théorie des twisteurs ? J'ai répondu que l'on peut résoudre les équations de Maxwell *[qui expriment des lois fondamentales en physique]* ou représenter de manière élégante les solutions de l'équation du champ d'Einstein *[ce sont les équations qui fondent la théorie de la relativité générale]*. Ils m'ont demandé si je pouvais en dire plus, et j'ai répondu que ce ne serait pas une bonne idée, tout développement faisant intervenir la notion de cohomologie.

Le lendemain matin, je me suis rendu compte que la «tribarre» *[le triangle de Penrose]* était une incarnation de la cohomologie. Localement, la distance de la figure à vos yeux est le paramètre constant. Mais lorsque vous en faites visuellement le tour, il se passe quelque chose de non trivial sur le plan de la cohomologie. Je leur en ai parlé le lendemain, mais ils n'ont pas retenu cette idée dans l'émission.

Pourriez-vous développer cette idée ? Comment les mathématiques peuvent-elles aider à caractériser les figures «vraiment» impossibles ?

Après l'émission, j'ai reparlé de mon idée avec des collègues mathématiciens. Cette notion de distance à l'œil de l'observateur est essentielle en perspective. J'en ai tiré un article, *On the cohomology of impossible figures [The MIT Press, 1992, voir encadré page 7 pour un développement mathématique]*.

Triangle de Penrose, figures impossibles, paradoxes visuels… L'œuvre du graveur néerlandais Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) n'est pas loin ! Comment l'avez-vous connu ?

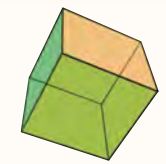
Ma rencontre avec Escher commence avec le Congrès international des mathématiciens en 1954, qui se déroulait à Amsterdam. Un collègue avait sur lui un catalogue d'exposition, avec sur la couverture cette œuvre *Jour et Nuit* (1934), qui représente des oiseaux allant en deux sens opposés. Il m'apprend qu'un artiste nommé Escher faisait l'objet d'une exposition au musée Van-Gogh. Je m'y suis rendu. J'ai été stupéfait, notamment par *Relativité* (1953) *[voir en page 8]*, qui montre des escaliers imbriqués, sans respect pour la gravité.

L'art de « compter les trous »

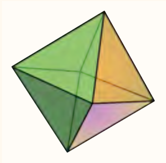
Les *groupes d'homologie* permettent de définir précisément ce qu'est un « trou » dans une surface mathématique abstraite de grande dimension, comme une variété, ou dans un espace topologique. L'*homologie* permet de « classer ces différentes catégories de trous ». On parle également de *cohomologie* et de *groupes de cohomologie* au lieu de « homologie » et « *groupe d'homologie* » ; la différence entre les deux terminologies est essentiellement technique.

L'histoire de cette théorie commence avec la fameuse *formule d'Euler*, ou *caractéristique d'Euler – Poincaré*. Dans le cas d'un polyèdre, elle avance que le nombre S des sommets plus le nombre F des faces moins le nombre A des arêtes est constant, égal à 2. René Descartes puis Leonhard Euler savaient que S + F – A = 2. Ce puissant invariant a été généralisé au cas de polyèdres « comportant des trous », puis à des contextes extrêmement généraux, par Henri Poincaré, André Weil et Alexander Grothendieck.

S = F = 4 et A = 6.



S = 8, F = 6 et A = 12.



S = 6, F = 8 et A = 12.

S = 20, F = 12 et A = 30.

©*Lwphillips, 2014*

Laissons Roger Penrose évoquer un joli problème cohomologique, qui inspirera peut-être des lecteurs amateurs d'illusions et de mathématiques :

« Voici un problème que je soumets à mes étudiants. Ils ne l'ont pas résolu, et moi non plus ! Nous nous trouvons dans une pièce, avec un dôme sphérique, comme un planétarium. Il y a des dessins sur tout le pourtour de la sphère, qui représentent une image qui ne peut pas exister, une figure impossible. Puis quelqu'un ouvre une porte. On a alors un trou dans la sphère, et soudain l'image qui était impossible devient possible. C'est un H^2 [le deuxième groupe de cohomologie]. *Est-ce réalisable ? »*

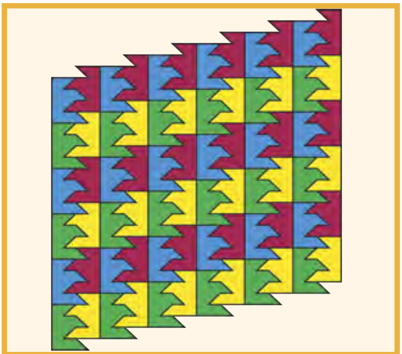
J'en suis sorti en me disant que je devais représenter des impossibilités que je n'avais jamais vues, même dans cette exposition. J'ai dessiné des ponts, des routes, des rivières empruntant des chemins incohérents. J'ai simplifié le résultat pour aboutir à la tribarre. Je l'ai montrée à mon père, qui a commencé à dessiner des bâtiments incohérents. Cela a évolué vers les escaliers impossibles. On a alors décidé d'écrire un article. Mais à quel journal soumettre cet article, quel était le sujet ? Mon père connaissait un éditeur au *British Journal of Psychology*, donc on a convenu que c'était de la psychologie, l'article a été publié *[Impossible objects: a special type of visual illusion, 1958]* et on en a envoyé une copie à Escher.

Mon père et lui ont beaucoup échangé, et Escher a réalisé *Montée et Descente* (1960), qui figure un escalier impossible. Je suis allé lui rendre visite à Apeldoorn. Il m'a montré nombre de ses gravures. Il y avait deux piles d'œuvres.

Il a proposé de m'en donner une de la seconde pile. Le choix a été difficile, bien sûr, mais je me suis arrêté sur *Poissons et Écailles* (1959). Il en a été très heureux car les gens semblaient ne pas trop apprécier cette œuvre. Il a utilisé le même procédé que pour *Exposition d'estampes* (1956), dans laquelle le garçon se retrouve dans l'image qu'il observe. On a une contradiction en théorie des types ; c'est un paradoxe de Russell. Il a été heureux que je comprenne ce qu'il avait voulu représenter.

Poissons et écailles. M.C. Escher, 1959. L'œuvre est reproduite dans *le Miroir magique de M.C. Escher* (Bruno Ernst, Taschen, 1994). *Photo : É.T., 2021*

Quels furent vos échanges mathématiques lors de cette rencontre ?



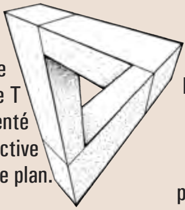
Exemple de pavage anisoédrique avec la *tuile de Heesch* H : les tuiles de Heesch bleues et vertes présentent une classe de symétrie (de translation), les tuiles de Heesch rouges et jaunes présentent une autre classe de symétrie (de translation également), et H ne peut pas paver le plan en n'utilisant qu'une seule des deux classes de symétrie.

© David Eppstein, 2013

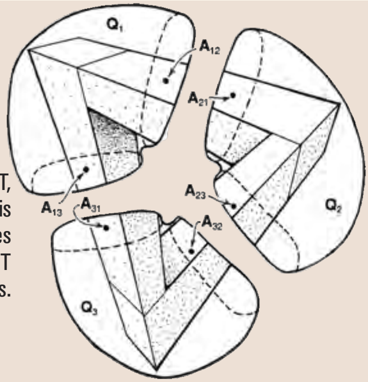
J'avais emporté avec moi des casse-tête et des éléments géométriques pour réaliser des pavages *[voir la brochure* Maths Jeux Culture Express *éditée par le CIJM en 2019]*. Or, les dix-sept groupes de symétrie du plan se retrouvent illustrés dans les œuvres d'Escher, suite sans doute à ses deux séjours à Grenade, où il a pu visiter l'Alhambra. Je lui ai alors montré un pavage *anisoédrique [dans lequel on peut trouver deux formes qui ne sont pas équivalentes, sous aucune symétrie du pavage ; voir la figure ci-contre].*
Escher a résolu l'énigme géométrique que je lui ai proposée. Plus tard il m'a demandé, dans une lettre, quelle était l'explication derrière ces pavages. Je lui ai montré les règles d'assemblage de deux losanges *[qui permettent d'engendrer un* pavage de Penrose*, à savoir un pavage apériodique du plan]*. Il a utilisé ce procédé dans l'une de ses dernières

Caractériser les figures « impossibles »

Voici comment Roger Penrose explique le lien entre la cohomologie et certaines figures impossibles ou paradoxales dans son article d'à peine trois pages *On the cohomology of impossible figures* (*Visual Mathematics*, The MIT Press, 1992). C'est, comme toujours, un modèle de clarté, de concision et d'élégance.



Le triangle de Penrose T représenté en perspective sur le plan.



Partition du plan contenant T, de telle sorte que les trois structures élémentaires permettant d'assembler T par recollage sont possibles.

Dans cette représentation, le plan Q de la figure se compose des trois régions Q_1, Q_2 et Q_3, dans lesquelles la seule ambiguïté possible (matériellement parlant) est la distance $d > 0$ à notre œil E. Le *groupe d'ambiguïté* introduit par Penrose est alors $\mathbb{R}^+$ muni de l'addition. Concentrons-nous sur Q_1. Le point A_{12} est confondu avec A_{21} dans Q_2 ; le point A_{13} est confondu avec A_{31} dans Q_3. Maintenant, regardons A_{23}, dans Q_2, qui doit correspondre à A_{32} dans Q_3.

S'il existait un objet tridimensionnel O_i représenté par Q_i (où i = 1, 2 et 3), le point de O_1 correspondant à A_{12} ne serait pas à la même distance de E que le point de O_2 correspondant à A_{21}. Soit $d_{1,2}$ le rapport de ces distances.

Plus généralement, on note $d_{i,j}$ le rapport entre (au numérateur) la distance de E au point de O_i représenté par A_{ij} et (au dénominateur) la distance de E au point de O_j représenté par A_{ji}. Les quantités $d_{i,j}$ ne dépendent que des régions Q_1, Q_2 et Q_3, et pas du choix de points A_{ij} particuliers dans ces régions. Le réel positif $d_{i,j}$ représente le facteur de grossissement (ou de rétrécissement : $d_{i,j} = 1 / d_{j,i}$) que l'on doit appliquer en passant de O_i à O_j à l'endroit où ces deux régions doivent se recoller (et les points A_{ji} et A_{ij} coïncider). Du point de vue mathématique, c'est l'ensemble des nombres $d_{i,j}$ qui possède une interprétation cohomologique (ils sont les éléments du premier groupe de cohomologie $H_1(Q, \mathbb{R}^+)$ et forment un cocycle). La question, vague, de savoir s'il existe un « objet physique matériel global » dont la représentation serait T (ou toute autre représentation de Q) peut alors se reformuler de manière claire et non ambiguë, et se résoudre de façon purement calculatoire : la figure est impossible si, et seulement si, l'élément unité du premier groupe de cohomologie est égal à 1. En l'occurrence, dans le cas de T, on trouve effectivement 1 : on est en présence d'une figure impossible.

aquarelles, qu'il appelait *« Mes petits fantômes »* : les fantômes permettent de réaliser un pavage anisoédrique du plan. Historiquement, cette œuvre avec le pavage anisoédrique est liée au dix-huitième problème par David Hilbert en 1900. Il demandait s'il existait des formes en trois dimensions permettant de paver l'espace uniquement de manière anisoédrique. Il pensait le cas du plan trivial ! *[Hilbert pensait sans doute qu'une telle forme ne pouvait exister en deux dimensions, et que la démonstration en serait évidente.]* Heinrich Heesch a pourtant trouvé une telle forme pour le plan en 1935. *[Dès 1928, Karl Reinhardt en avait trouvé une en trois dimensions !]*

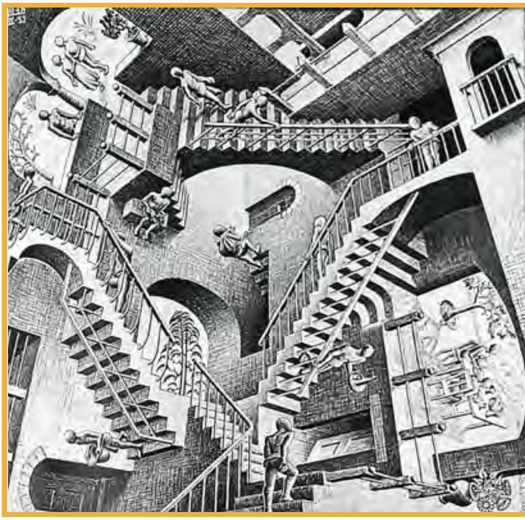
Roger Penrose montre l'une des dernières œuvres de Maurits Escher, réalisée alors que l'artiste était hospitalisé ; elle est reproduite dans *The World of M.C. Escher* (Maurits Cornelis Escher et Johannes Lodewijk « Hans » Locher, The New American Library, 1984).

© É.T., 2021

Cela représente deux influences d'origine mathématique de votre part sur Escher !

En quelque sorte ! J'ai même accepté il y a vingt ans d'écrire un livre sur les concepts mathématiques représentés par Escher. Pour l'instant, je n'ai rien fait du tout *[rires]*. Mais en 2020, j'ai mis la main sur une étudiante américaine en physique théorique qui est intéressée par ce projet ; nous y travaillons et espérons bien faire aboutir l'ouvrage !

R. P.** interviewé par **É. T.



Ci-dessus, *Jour et nuit*. M.C. Escher, 1938. L'œuvre est reproduite dans *M.C. Escher Taschen Calendar* (Taschen, 2000).

À gauche, *Relativité*. M.C. Escher, 1953. L'œuvre est reproduite dans *le Miroir magique de M.C. Escher* (Bruno Ernst, Taschen, 1994).

Photos : É.T., 2021

Toutes les œuvres de M.C. Escher :
© Cordon Art B.V., Baarn, Pays-bas

Maths et cinéma : un tournage en compagnie de Roger Penrose

Quentin Lazzarotto
Réalisateur, responsable du pôle audiovisuel de l'Institut Henri Poincaré

À partir de quelques anecdotes de tournage, je vous propose un voyage dans les coulisses du documentaire scientifique. Joignons l'utile à l'agréable : ces anecdotes impliquent le sémillant Sir Roger Penrose, parrain du Salon Culture et Jeux Mathématiques 2021. Intervenant principal du film *Einstein et la Relativité générale**, réalisé en 2015, il a accepté que nous le filmions sur les traces de son passé londonien. Au fil de cette journée de tournage, quelques situations permettent une réflexion sur la fabrication et les défis liés à la vulgarisation scientifique au sein d'une narration audiovisuelle. Les lecteurs les plus intéressés, qui souhaiteraient se mettre à la pratique, glaneront aussi çà et là quelques astuces et conseils…

Générique du film.

* *Einstein et la Relativité générale : une histoire singulière*, 2015. Réalisé par Quentin Lazzarotto, co-écrit avec Jean Eisenstaedt et Jean-Philippe Uzan, co-produit par l'Institut Henri-Poincaré / Sorbonne Université, et Look@Sciences.

Société astronomique royale de Londres, juin 2015

Le drapeau britannique, appairé à celui de la Royal Astronomical Society, flotte tranquillement dans la brise légère. Il fait frais, l'équipe est fébrile, prête, impatiente. L'immense bâtiment en impose ; grandes colonnes palladiennes du XVIII^e^ siècle, bibliothèques parfaitement alignées, globes célestes, et tapis feutrés. Voilà le taxi-cab qui apparaît au bout de The Strand, une importante rue de la capitale. Il s'engouffre dans la grande cour d'honneur. Roger Penrose, 84 ans, en sort tout sourire.
Nous devions commencer par le filmer marchant dans les couloirs et les escaliers du bâtiment. Hélas, du taxi, Roger Penrose s'extrait à l'aide de deux béquilles avant de s'avancer vers nous en claudiquant. Impossible de le filmer montant les grands escaliers !
Il faut changer les plans, et rapidement ! Le chef opérateur (ou « chef op », responsable de la caméra et du rendu de l'image) s'entête : il a tout préparé depuis des heures ! Quant à moi, je m'interroge : au fond, quel intérêt y avait-il vraiment à filmer Roger Penrose qui déambule ? C'est plutôt ce qu'il a à nous raconter qui nous intéresse. Que faire ?

L'imprévu : voilà celui qui règne en maître sur les tournages. Évènements météorologiques, travaux, bugs techniques, acteur ou intervenant récalcitrant… Il y a l'idée, et il y a la réalité, qui s'opposent souvent. Certains se battront jusqu'à l'épuisement (de leurs forces et de leur budget) pour imposer leur idée et faire plier la réalité, mais mieux vaut s'adapter et s'inspirer de l'imprévu lui-même. Ce n'est pas si évident ; au-delà de la simple pression « artistique », les aspects très pratiques pèsent aussi sur les épaules du réalisateur : le budget mis en œuvre pour acheminer une équipe de quatre personnes jusqu'à Londres, la rigueur technique (les optiques, les lumières, fixées en amont en fonction du scénario prévu), et le « contrat » avec le diffuseur ayant investi l'argent, et qui s'attend à obtenir les images promises. Tout cela, ce matin de juin 2015, se heurte frontalement aux béquilles de Sir Roger Penrose.

Histoire versus contenu : l'équation centrale du film scientifique

Cette séquence de « déambulation » répondait à un besoin technique classique. On filme l'intervenant en train de se balader pour obtenir des images permettant d'illustrer ensuite son interview. Le lieu le justifiait : dans cette bibliothèque royale, Roger Penrose reçut l'un de ses premiers prix, pour ses travaux avec Stephen Hawking (1942–2018). Nous pourrions nous contenter de sa parole : le souci, cependant, est de se retrouver « à sec » au montage, avec trop d'aspects pédagogiques, sans possibilité de donner vie au personnage. C'est le dilemme fondamental du réalisateur de films scientifiques. Interviews fleuves de prix Nobels ou autres profils prestigieux, voix *off* explicative pour vulgariser les concepts… toute cette pédagogie très tentante répond à l'idée que les films documentaires vont « apprendre » quelque chose au public. Comme peuvent le faire une conférence, un MOOC (les cours filmés disponibles en ligne), ou une vidéo Youtube. Dans ce cadre, deux heures d'entretien avec le célèbre Roger Penrose feraient largement l'affaire. Mais alors que les questions s'enchaînaient face à la caméra, et que les réponses de l'intéressé, toujours généreuses, expliquaient des concepts relativistes de haute volée, le risque est réel que le spectateur s'ennuie, voire décroche. Il est permis de penser que les documentaires scientifiques pour le grand public ont en réalité peu à voir avec ce genre de discours pédagogique.

Prenons un succès récent : *Comment j'ai détesté les maths***, documentaire ayant séduit plus de quatre-vingt mille spectateurs dans les salles de cinéma françaises, et offrant par là une tribune inédite aux mathématiques. Son réalisateur Olivier Peyon me confiait son exaspération à propos de certains journalistes qui présentaient son film comme *« un film sur les mathématiques »*. Lui a pensé faire un film *« sur les mathématiciens »*. Je débutais alors dans la réalisation, et sa remarque me fit réfléchir longtemps : ne pas confondre thème (les mathématiques) et sujet (les mathématiciens). Le sujet, c'est l'histoire, c'est ce qui compte vraiment. Pour filer la métaphore scientifique, on a ici « l'équation » du film de science, une équation à équilibrer entre histoire et contenu pédagogique.

En tournage, Roger Penrose redécouvre le prix (médaille Eddington) qu'il a obtenu de la Société royale d'astronomie en 1975.

Dans le cas de Roger Penrose, quelle est l'histoire qui le concerne vraiment ? Lorsqu'il aborda son explication à propos de « l'information » à tout jamais avalée et perdue en tombant derrière l'horizon d'un trou noir, je sentis une opportunité, et lui demandai si tout cela ne le rendait pas triste, cette idée que rien ne pourrait jamais plus s'échapper. Bingo !

Roger se redresse, sourit à la caméra, commence à raconter (et non plus expliquer) combien le sentiment a été fort dans la communauté scientifique. Il s'adresse directement à moi (*« Je vois que ça vous rend triste »*), et conclut : *« Oui, moi je crois que tout peut disparaître, même si les autres pensent l'inverse. »* Nous y sommes : il me parle de lui, et non plus uniquement du trou noir. Sans surprise, ce passage a été gardé en priorité par la monteuse du film. Mais cette parole, filmée de manière très directe, ne suffira pas. Comment insuffler un peu plus d'âme dans cette séquence ?

Passage piéton, singularité, émotion et… prix Nobel

L'interview terminée, nous prenons la direction de Birkbeck College. Une université au centre de Londres, très en vogue auprès de la nouvelle vague de scientifiques des années 1960, à laquelle appartenait Roger Penrose, qui y a enseigné. Nous avions l'autorisation d'y tourner. Mes co-auteurs et moi connaissions une anecdote historique qui se serait déroulée devant l'université. Je décide alors de demander à Roger de la revivre face caméra.

Imaginez un peu : Roger Penrose traverse un passage piéton, un jour de 1964, accompagné d'un ami (celui-ci sera ici joué par l'un de mes co-auteurs, Jean Eisenstaedt). Arrivé de l'autre côté, Roger Penrose ressent un excitant sentiment de joie dont il n'identifie pas la raison. Il s'en confie à son ami, réfléchit (est-ce tout simplement un effet de ce très bon petit-déjeuner dégusté ce matin, ou d'une excellente nuit de sommeil ?), mais ne parvient pas à en comprendre la source. Le sentiment euphorique perdure presque toute la journée, jusqu'à l'épiphanie : il a résolu son problème de physique fondamentale inconsciemment ! Il a conceptualisé une *surface piégée*, une surface sphérique sur laquelle tous les rayons lumineux (et donc, dans ce cas, toute particule) sont dirigés inexorablement vers l'intérieur sous l'effet d'une gravitation intense. Il publiera l'année suivante son théorème sur les singularités, à la base du concept moderne de trou noir, et pour lequel il a reçu le prix Nobel en 2020.

** *Comment j'ai détesté les maths*, 2013. Réalisé par Olivier Peyon, produit par Haut et Court. Récompensé du prix D'Alembert pour la diffusion des mathématiques, et nommé au César du meilleur documentaire en 2014.

Roger Penrose raconte son moment eurêka.

©*IHP et Look@Sciences 2015*

La séquence est touchante, amusante, décalée, imagée. La bonhomie de Roger Penrose irradie la caméra, grâce au plaisir qu'il prend à raconter son histoire. Certes, on n'apprend pas grand-chose sur la physique et la géométrie de la surface piégée. Mais est-ce le rôle d'un film ? Ces mathématiques sont si difficiles, si abstraites… L'idée ici consiste plutôt à faire découvrir au public un personnage, une histoire qu'il ne connaissait pas, et de transmettre de l'émotion. S'il est touché, le spectateur retiendra l'existence de cette anecdote, et s'il souhaite en savoir plus, il approfondira avec des conférences ou des livres.

Comme l'avait remarqué Marshall McLuhan, dans sa célèbre étude sur les médias, la richesse des sens offerte par le cinéma (image, son, musique, montage…) en fait un medium « chaud ». La définition d'un médium chaud selon McLuhan, monopolise de nombreux sens humains, suscitant de fortes émotions, et par là, place le spectateur dans un état de réceptivité passive. Fort de cette définition, on comprend que des séquences purement « pédagogiques » au sein d'un film sont vouées à l'échec : le spectateur n'est pas à ce moment-là en état de réfléchir, comme il pourrait l'être en conférence. Par ailleurs, l'acte de limiter un documentaire à la parole, à l'information, semble s'inscrire dans une forme de négation du médium audiovisuel lui-même.

Le rapport à « la vérité historique » dans le film scientifique

Interrogeons-nous un instant : cette superbe anecdote racontée par Roger Penrose était-elle vraie ? Après tout, il n'y a que lui pour l'affirmer. Dans le fond, et au risque de choquer un peu mes co-auteurs scientifiques, je m'amuse à penser que… peu importe ! Tant que l'histoire ne transforme pas les faits scientifiques, le rôle du réalisateur consiste à trouver, grâce à la liberté qu'il a de raconter, la vérité humaine sous-jacente aux faits scientifiques. Ce genre de vérité s'apparente au travail du célèbre réalisateur Werner Herzog. La nommant « vérité extatique » (*extatic truth*), il encourage tout réalisateur à la rechercher activement. Cela implique de mettre en scène le documentaire comme une fiction, en réunissant les conditions pour débusquer cette vérité et la faire surgir à l'image. Imprévu, anecdotes, partage d'émotion… cette journée londonienne fut, précisément, riche en émotions. Par tous ces aspects, Roger Penrose fut un excellent complice. Rien d'étonnant à cela ; ses réflexions personnelles sur l'importance de la représentation en mathématiques (ses conférences sont toujours agrémentées de magnifiques figures dessinées à la main), ainsi que sur ses objets impossibles par exemple (voir par ailleurs dans cette brochure), montrent qu'il a depuis longtemps réfléchi à la transmission des concepts scientifiques autrement que par de la simple pédagogie. Grâce à lui, cette séquence est devenue l'une des plus cultes du film. Et le contrat fut rempli. À l'aide d'un comité scientifique sérieux, de conseillers et auteurs scientifiques impliqués dès la rédaction de l'histoire, et tout en garantissant un espace créatif au tournage, l'Institut Henri-Poincaré a pu offrir au public la découverte d'un personnage dans une forme d'intimité, parlant d'un concept scientifique extrêmement pointu et très peu connu. Et tout cela, même si nous n'avons pas exactement tourné les images prévues !

Q. L.

Pour en savoir (un peu) plus

Dossier « Roger Penrose ». *Tangente* 198, 2021.

Les théorèmes de singularités de Penrose et hawking. François Béguin, CNRS, 2020, disponible en ligne.

« Dingue de maths » Quentin Lazzarotto, écrit en duo avec le mathématicien Avner Bar-Hen, Hachette, 2021.

Pour comprendre les médias : les prolongements technologiques de l'homme. Marshall MacLuhan, Le Seuil / Mame, 1964.

Minnesota Declaration: Truth and Fact in Documentary Cinema. Werner Herzog, « manifeste » à destination des réalisateurs de documentaire, 1999, disponible en ligne.

Quand les artistes croquent les maths

Denis Moreau

Ancien chargé de mission « Approche des Mathématiques par l'Art et le Jeu » à la Ville d'Eaubonne (Val-d'Oise)

En 1976, le dramaturge autrichien Thomas Bernhard (1931–1989) fait, dans sa pièce *Minetti*, le portrait d'un grand acteur en vieil artiste au crépuscule de sa gloire. Attendant l'arrivée improbable d'un directeur de théâtre devant lui proposer un grand rôle, le comédien laisse échapper ces mots (dans la traduction de Claude Porcell aux Éditions de l'Arche, 1982) :

« Mon frère le mathématicien / avec lequel il y a trente ans / dans cette maison / je parlais des intégrales / a pris l'un *des chemins / moi* l'autre */ lui le chemin de la science / moi le chemin de l'art / le chemin artistique madame / J'ai succombé à une idée démentielle / en succombant à l'art dramatique / perdu sans espoir dans la matière de l'art dramatique / vous comprenez / j'ai mené moi-même l'existence de mon frère / les mathématiques jusqu'à l'absurde / L'art dramatique comme but de l'existence madame / quelle monstruosité. »*

Ce texte rapproche l'artiste du mathématicien, perçus comme des êtres en marge du monde, menant une quête dans la pensée, l'imaginaire et l'abstraction, allant jusqu'à l'absurde. Il est vrai que l'on rapproche souvent l'artiste, comme le mathématicien, voire le scientifique, de la figure du « fou », du savant fou ou du fou du roi, du visionnaire, voyant le monde comme personne. Des êtres fascinants menant une existence différente du commun des mortels.

« *Deux chemins différents* » : le rapprochement pourtant possible

Si elle appelle à ne pas opposer les mathématiques aux arts, cette vision semble également une image symptomatique imprimée dans l'imaginaire collectif. Elle appuie beaucoup de discussions mondaines sur l'idée d'un rapprochement, voire d'une réunification, entre les arts et les mathématiques – et même les sciences en général.

Pourtant, et les mots de Thomas Bernhard en témoignent, il s'agit bien de « *deux chemins différents* », ne serait-ce que parce que les mathématiques reposent sur la preuve d'un résultat dans un système logique rigoureux, ce qui n'est pas le souci de l'art. Aussi, un rapprochement hâtif est une vision naïve, voire dangereuse, pour l'art comme pour les mathématiques, car elle ne fait que réduire la perception que nous avons de l'un et de l'autre, de les méconnaître, de leur faire perdre leur diversité et leurs énormes richesses réciproques. Plus grave, cette vision risquerait d'inféoder l'un à l'autre. Comme l'écrit le physicien français Jean-Marc Levy Leblond (né en 1940), par ailleurs essayiste et amateur d'art, à propos des liens entre science et art (que l'on pourra adapter aux mathématiques) : *« Si la science veut se faire culture, ce n'est pas en récupérant ou en arraisonnant la création artistique qu'elle y parviendra ; et si les arts veulent être en prise avec un monde dominé par la technoscience, ce ne sera pas en la plagiant ou en s'y inféodant »* (*LA SCIENCE n'EsT pas L'ART*, Hermann, 2010).

Ce n'est pas pour autant qu'il n'y a pas de points de rencontres, de lieux de dialogue – ou de confrontation – possibles. Cette rencontre peut passer par une collaboration équilibrée entre un mathématicien et un artiste, répondant à des besoins différents pour l'un et l'autre. La conférence-spectacle associant le chercheur Florent Hivert et le jongleur Vincent de Lavenère en est un exemple. Le circassien travaille sur une jonglerie avec des balles musicales. Il se pose le problème d'« écrire » des figures sur le papier, et même des « partitions » pour jouer des airs avec des balles accordées. Pour le mathématicien, lui-même jongleur, il y a là un problème de modélisation, d'analyse, et d'encodage, puis d'algorithmique. Le voilà prêt à relever de nouveaux défis mathématiques en prolongeant un travail entamé depuis le début des années 1980 par de nombreux scientifiques jongleurs autour de la modélisation et de la notation du jonglage avec le *siteswap*, le codage qui s'est aujourd'hui imposé. La rencontre devient dialogue, ouvrant le champ des possibles pour l'artiste dans sa création, et apportant au mathématicien un problème nouveau à traiter.

Jonglerie, automates et combinatoire,

avec, à gauche, Florent Hivert (professeur en informatique à l'université Paris-Sud)

et, à droite, Vincent de Lavenère (jongleur, compagnie Chant de balles).

La trace laissée par les mathématiques dans la tête des artistes

Mais la rencontre ne se passe pas toujours dans un cadre collaboratif aussi clair. Dans leur appréhension du monde, les artistes croisent parfois, à des niveaux divers, des notions mathématiques. Comme ils le font pour tout ce qui passe par leurs yeux, leurs oreilles, leur cerveau, les artistes traduisent, interprètent, et surtout transforment ces mathématiques qu'ils ont pu rencontrer à travers un écrit, une discussion, un film, des études… pour en faire autre chose*.

La trace laissée par les mathématiques dans la tête des artistes peut alors se transformer en création artistique. En « croquant les maths », les artistes peuvent faire œuvre d'une traduction impossible, portant les mathématiques vers un langage artistique, et les transformant. Il peut ainsi arriver qu'une œuvre conserve en son sein la trace d'une notion, d'une interrogation, d'une vision liée aux mathématiques. Parfois cette trace peut même devenir titre d'un spectacle, comme pour la création récente de la danseuse et acrobate aérienne Fanny Soriano : *Fractales*.
La démarche artistique, ici, n'est pas centrée sur les mathématiques mais sur une réflexion autour de la place de l'homme et des corps dans la nature. Cependant, l'artiste a un père ingénieur qui lui parle depuis son enfance des fractales – ces objets mathématiques fascinants qui gardent toujours le même degré de complexité, quelle que soit l'échelle à laquelle on les regarde. Une notion qui permet d'appréhender de nombreux objets naturels, comme la fougère, le chou romanesco, ou les côtes de Bretagne, et qui est également intiment liée à de nombreux domaines, en particulier à l'étude des systèmes dynamiques et du « chaos ». Fanny Soriano n'a pas l'approche d'une mathématicienne pour s'approprier ces concepts et n'a aucune prétention scientifique. Mais sa « rencontre » avec la notion de fractale va l'amener à la traduire à sa façon, à l'interpréter, et la transformer en une matière autre, une œuvre artistique. Ainsi, à la question *« Comment allez-vous transposer ce principe des fractales au plateau ? »*, l'artiste répond, dans le journal du Pôle national cirque de Cherbourg, *Des pistes !* 4 (mars – juillet 2018) : *« Je travaille beaucoup sur le paysage en transformation, avec des évolutions cycliques et chaotiques. L'idée est que les choses se répètent, mais sans jamais savoir d'avance comment elles arrivent. […] On retrouvera l'idée de cycles chez les interprètes avec des détails qui se répètent de façon plus ou moins détournée, occasionnant des surprises. […] J'appréhenderai aussi corps et espace comme un microcosme évolutif où l'on peut zoomer à très petite ou très grande échelle. »*

* Une réflexion générale du compositeur Nicolas Frize est ici adaptée aux mathématiques et à l'art. Les points de départ sont les liens entre écrit et oralité, et les transpositions d'un art à un autre, d'un langage à un autre. Ces réflexions se font dans le cadre d'une création prévue en 2022 au lycée Paul-Éluard à Saint-Denis (Seine-Saint-Denis), voir www.nicolasfrize.net.

Fractales,
de la compagnie Libertivore.
Écriture et chorégraphie : Fanny Soriano.

«Transformer le théâtre comme laboratoire de représentations»

Les mathématiques peuvent donc s’insinuer dans la création et amener à penser à des formes artistiques nouvelles. Et c’est parfois radical. On pourrait reprendre les propos du metteur en scène de théâtre Jean-François Peyret, qui a beaucoup travaillé à partir de sources «scientifiques», et les appliquer aux mathématiques : *«La science n’est pas là pour se faire populariser par un théâtre qui n’est plus guère populaire, mais pour le transformer comme laboratoire de représentations à la hauteur de l’époque»* (propos recueillis par Michel Valmer, Alliage 47, 2001).

Par exemple, le poète et homme de théâtre Armand Gatti (1924–2017), découvrant le travail mathématique d’Évariste Galois (1811–1832), a, à une période de son œuvre, supprimé la notion de personnages, pour faire des groupes algébriques la structure de sa dramatisation ! On retrouvera, tout au long de cette œuvre protéiforme (qui traite à la fois de la résistance, de combats politiques, de la pensée humaine, et du langage), la trace de travaux mathématiques «révolutionnaires», comme ceux de Kurt Gödel sur l’incomplétude, ou ceux d’Emmy Noether sur la place des symétries dans les lois de la physique.

Possibilités de la symétrie virtuelle pour faire entrer en mathématiques les groupes de la dernière nuit d’Évariste Galois, d’Armand Gatti (mise en scène de Frédérick Darcy et Matthieu Aubert).

Il arrive également que la rencontre avec les mathématiques soit l'un des moteurs de la création. Cela peut partir de mathématiciens de formation supérieure, s'engageant ensuite dans une démarche artistique avec la volonté de rendre perceptibles autrement des questions mathématiques, en travaillant à des formes créatives parfois bien affirmées. On peut citer les clowns de la compagnie L'Île Logique initiée par le mathématicien spécialisé en logique Cédric Aubouy, les contes mathématiques de Marie Lhuissier, normalienne, agrégée de mathématiques et titulaire d'un doctorat sur les systèmes dynamiques, ou encore les spectacles de théâtre de la compagnie Terraquée de François Perrin (normalien, agrégé et ancien doctorant en histoire des mathématiques) et de l'actrice Meriem Zoghlami.

Sans qu'ils aient nécessairement mené un important cursus mathématique, certains artistes peuvent aussi choisir un thème mathématique comme point de départ d'un projet artistique. Cela peut ensuite les conduire assez loin dans la création de formes nouvelles. Par exemple, dans *Ronde carrée* et *Notes sur un triangle*, le cinéaste québécois René Jodoin (1920–2015) prend comme « sujet » un problème géométrique** : l'étude des découpes du carré pour l'un (en carrés, rectangles et triangles), les découpes et recompositions d'un triangle équilatéral pour l'autre. Même si, comme le rapporte le cinéaste, performeur et artiste visuel Pierre Hébert dans son *blog*, il y a dans ces films une dimension pédagogique (*« Le déroulement du film fut établi d'après les conseils d'un mathématicien et il fut effectivement utilisé à des fins d'enseignement »*), les mathématiques sont métamorphosées. Appliquant aux figures géométriques les transformations du plan (rotations, translations…) pour créer le mouvement, René Jodoin fait danser les formes dans une chorégraphie étrangement légère et entraînante, portée par une musique savamment choisie. Les mathématiques deviennent le point de départ d'une forme de cinéma d'animation légère et abstraite. Elles se poétisent, se métamorphosent en films fascinants et hypnotiques. Elles amèneront René Jodoin à créer un langage cinématographique propre, où la géométrie semble omniprésente, et qui le poussera vers des sujets riches comme le geste, le rythme le mouvement, le langage du corps en action…

Jonglage, cirque, théâtre, cinéma, musique, peinture, sculpture danse, littérature…

Il est indéniable que les mathématiques ne sont pas étrangères à un certain nombre d'œuvres artistiques et que des points de rencontres particulièrement fertiles existent. Les pistes évoquées plus haut sont loin d'être exhaustives.

** Ces films sont visibles sur le site de l'Office national du film du Canada : ***https://www.onf.ca/film/ronde_carree*** et ***https://www.onf.ca/film/notes_sur_un_triangle***.

Des pythagoriciens à Iannis Xenakis (1922 – 2001) en passant par Jean-Sébastien Bach (1685 – 1750), les liens entre mathématiques et musique sont très souvent abordés. Les lecteurs curieux pourront également se référer au bel article *Danser les maths* : la chorégraphie, de la symétrie aux algorithmes de Gaël Octavia, sur certains liens entre la danse et les mathématiques, dans la brochure *Maths Mouvement Express* publiée en 2018 par le CIJM. On peut également citer l'Ouvroir de littérature potentielle (l'Oulipo), l'Ouvroir de musique potentielle (Oumupo), et tous les OuXpo (voir la brochure *Maths Langage Express*, publiée en 2017 par le CIJM).

Notes sur un triangle, de René Jodoin.

© Office national du film du Canada

Voir les mathématiques au prisme de ces œuvres permet de faire des pas de côté, et de les révéler sous un jour différent, ce qui est essentiel aussi bien pour le profane que pour le chercheur. Toutefois, ne demandons pas, quand les artistes croquent les maths, à ce qu'ils fassent œuvre de mathématiciens (même s'ils sont mathématiciens !). Ne leur demandons rien, d'ailleurs, si ce n'est de créer leurs œuvres avec engagement et conviction. Laissons-les mordre les mathématiques à pleines dents, les transformer à volonté – comme ils transforment tout ce qui les traversent – et faire leur art pour dépasser la réalité, le monde, la raison, multiplier le champ des possibles, ouvrir de nouvelles voies à la pensée, à l'imagination, et à notre rapport au monde.

D. M.

Pour en savoir (un peu) plus

« Jonglerie, automate et combinatoire ». Florent Hivert et Vincent de Lavenère, conférence-spectacle présentée lors du Salon de la culture et des jeux mathématiques, 2018, disponible en ligne.

« Pièce (dé)montée : ***Fractales***. » Dossier réalisé par Caroline Veaux, Canopé DT PACA, 2019, disponible en ligne.

Théâtre de sciences. Michel Valmer, CNRS Éditions, 2006.

La traversée des langages. Armand Gatti, Verdier, 2012 (dix-neuf pièces de théâtre).

De la symétrie en pâtisserie : comment couper une pomme

Mickaël Launay

Mathématicien, auteur et Youtubeur

Je devais avoir 11 ans lorsque, lors d'un repas au self du collège, un ami me montra une fascinante façon de couper une pomme en deux parts égales. Avec un couteau, il avait réalisé six sections très précises faisant des angles droits entre elles. À l'issue de la dernière, la pomme s'était alors séparée en deux morceaux symétriques comme ceux que vous pouvez voir sur la figure de gauche.

Une pomme coupée en deux morceaux symétriques.

Le résultat auquel je suis parvenu après quelques essais.

Une solution simple mais moins élégante.

Photo : M.L., 2021

Une fois rentré chez moi, je tentais de reproduire le truc en essayant de me rappeler ses gestes. Après quelques essais, je parvenais à un résultat qui toutefois ne me semblait pas identique. Vous le voyez sur la figure du milieu. Un peu plus tard, je découvris le lien qui existait entre ces découpages et l'étude des *polycubes*, ces figures formées de petits cubes assemblés les uns aux autres qui sont la source de nombreux puzzles. En considérant, très approximativement, que la pomme est « un cube de taille $2 \times 2 \times 2$ aux angles arrondis », il s'agissait de la couper en deux pièces composées chacune de quatre petits cubes $1 \times 1 \times 1$.

Il se trouve qu'il n'existe que trois façons différentes de réaliser un tel découpage. La troisième est cependant moins amusante : elle consiste simplement à trancher la pomme en deux en un seul coup de couteau (figure de droite).

Des jeux de construction à la symétrie en pâtisserie

À bien y réfléchir, il y avait une autre différence majeure entre le découpage de mon ami et le mien. Alors que les deux pièces de la première pomme étaient identiques, celles de la deuxième étaient seulement symétriques : l'une était le reflet de l'autre dans le miroir. C'est en effet une propriété bien connue des amateurs de puzzles et de jeux de construction : certaines pièces sont *chirales*, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas être superposées avec leur reflet dans le miroir. L'exemple le plus familier de telles formes est celui de nos mains : lorsque vous observez votre main droite dans un miroir, vous voyez une main gauche.

L'utilisation de la symétrie sous toutes ses formes est intéressante en cuisine, et particulièrement en pâtisserie, car elle permet de créer des motifs réguliers et particulièrement esthétiques.
Parfois, ces motifs se trouvent naturellement dans la forme des aliments travaillés. C'est le cas, entre autres, de la carambole, ce fruit dont la coupe donne d'élégantes étoiles à cinq branches, ou encore des graines de grenades, qui prennent la forme de *rhombo-dodécaèdres*, c'est-à-dire de solides à douze faces en losange. Dans d'autres cas, c'est au cuisinier de façonner avec sa matière première les formes qui nous donneront envie de croquer dans sa préparation. Selon les angles et le nombre de découpes, il est possible d'inventer de nombreuses variations géométriques de ces découpages et de les appliquer à divers autres fruits. Mais il est possible d'aller bien plus loin.

Des mathématiques appétissantes : du tressage des brioches

Le façonnage des brioches offre un autre domaine d'exploration des symétries. Après avoir fait lever la pâte, cette dernière est généralement divisée en plusieurs rondins, qui sont tressés entre eux afin de prendre, à la cuisson, des formes vallonnées et dorées. Les deux types de tressage les plus simples sont ceux à deux branches et ceux à trois branches. Comme pour le découpage des pommes, ils se distinguent assez aisément par leur symétrie.

À gauche,
le tressage à deux branches.
À droite,
le tressage à trois branches.
©M.L., 2021

La première brioche possède un centre de symétrie, ce qui signifie que vous ne verrez pas la différence dans son motif si vous la faites tourner d'un demi-tour sur la table (ou si vous regardez la figure de gauche en tenant cette brochure à l'envers). En revanche, cette symétrie particulière est chirale : la brioche n'est pas identique à son reflet. Il existe donc deux types de brioches à deux branches : les *dextrogyres*, dont l'hélice tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, et les *lévogyres*, qui tournent dans l'autre sens.

La seconde, en revanche, se confond avec son reflet et n'a pas de centre de symétrie. Vue de dessus, elle ressemble à un épi et possède un axe de *symétrie glissée*. En d'autres termes, l'axe qui la traverse dans sa longueur sépare la brioche en deux moitiés dont les motifs sont identiques, mais décalés. Les épis d'un côté se trouvent entre les épis de l'autre côté.

Si ces deux-là sont les plus fréquentes, la diversité des tressages ne s'arrête pas à ces exemples. Les variations sont infinies. Certains tressages utilisent quatre, cinq ou même davantage de branches. Quelques-uns n'utilisent même qu'une seule branche ! Dans ce cas, en mathématique, le résultat obtenu ne s'appelle plus une *tresse*, mais un *nœud*. C'est le cas par exemple de la brioche dont le façonnage est représenté ci-dessous.

Une brioche « tressée avec une seule branche ».

© M.L., 2021

Les nœuds sont généralement classés par le nombre d'intersections de la bande avec elle-même. Un tableau complet des nœuds jusqu'à sept croisements se trouve ci-dessous.

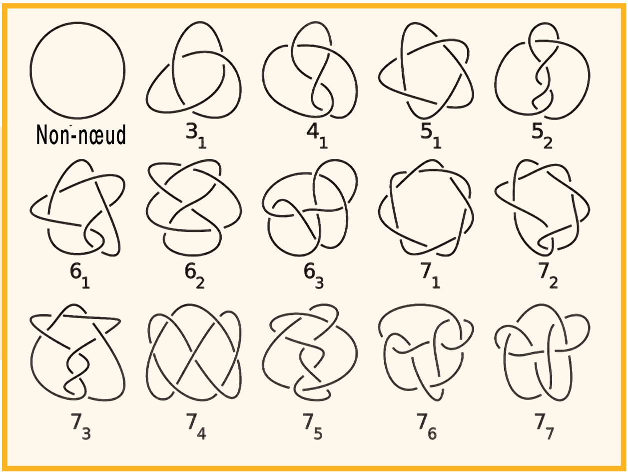


Tableau complet des nœuds de zéro à sept croisements.

© Dan Gruber, 2011

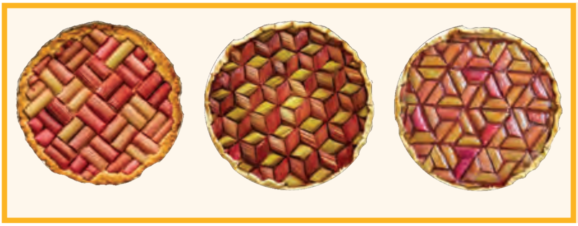
Pour leur étude théorique, les extrémités des nœuds ne sont pas laissées libres, mais réunies de façon à former une boucle. Ainsi, le *non-nœud* est simplement une boucle sans croisement, un beignet ou un *donut* pour le dire en termes pâtissiers. Celui numéroté 3_1 n'est nul autre que le classique *nœud de trèfle*. Les nœuds *étoilés*, tels que le 5_1 ou le 7_1, peuvent être vus comme des tresses à deux branches dont les extrémités ont été reliées : ils sont faciles à façonner et fréquemment utilisés pour former des brioches en couronne.

De l'importance d'une bonne vision dans l'espace…

Mais revenons à notre brioche à une branche. Imaginez que vous rejoigniez les deux extrémités libres en haut et en bas. Sauriez-vous alors dire à quel nœud mathématique du tableau elle correspond ?
La question n'est pas facile du tout et demande soit de bonnes facultés de vision dans l'espace, soit d'avoir une ficelle sous la main et de se prêter à quelques manipulations. D'une manière générale, un même nœud peut se présenter de multiples façons différentes et savoir en identifier deux égaux est une question très difficile qui suscite, aujourd'hui encore, de nombreuses recherches. C'est ainsi, par exemple, que le 2 février 2021, le mathématicien britannique Marc Lackenby (né en 1972) fit sensation en présentant un nouvel algorithme de reconnaissance de nœuds, plus rapide que tous ceux connus jusqu'à présent. Pour notre brioche à une seule branche, le nœud correspondant est celui numéroté 6_3. Mais bien sûr, libre aux gourmets amateurs de s'inspirer de toutes les autres pour former des structures briochées toujours plus surprenantes !

… pour apprécier brioches et autres tartes à la rhubarbe

Les tartes permettent, elles aussi, de nombreuses variations géométriques et, parmi elles, celles à la rhubarbe sont sans doute mes préférées. Les tiges de rhubarbe se coupent aisément en pièces géométriques régulières, permettant la réalisation d'une grande variété de motifs. La figure suivante en présente un petit échantillon, mais je ne peux que vous encourager à chercher d'autres images de telles tartes sur Internet pour vous rendre compte de leur diversité.

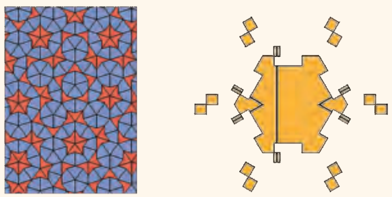


Des tartes et des symétries.

©Groupe LDC / Marie, 2018
©L214, 2019
©Chic Chic Chocolat, 2019

Nous entrons maintenant dans le domaine des pavages. Et encore une fois, leur classification peut se faire par l'observation de leurs symétries. Pour éviter toute irrégularité due au bord de la tarte, on peut imaginer que cette dernière « se prolonge à l'infini » (les gourmands apprécieront !) et que le motif de rhubarbe est sans limite. Dans ce cas, les axes de symétrie du pavage de gauche prennent deux directions perpendiculaires et forment un quadrillage carré. Ceux des deux autres tartes, en revanche, prennent six directions différentes, faisant des angles de 60° entre elles. D'une certaine manière, on peut donc identifier que ces deux dernières tartes appartiennent à la même famille… ou presque. En étudiant leur structure attentivement, il est possible de remarquer que le pavage du centre possède des centres de symétrie (au milieu de chacune des pièces en losange) tandis que celui de droite n'en a aucun. Leur parenté n'est pas parfaite.

À la fin du XIX^{e} siècle, il fut établi par le mathématicien et cristallographe Evgraf Stepanovitch Fedorov (1853 – 1919) qu'il n'existe, en tout et pour tout, que dix-sept catégories de pavages réguliers, selon le nombre et la nature de leurs symétries. Mais un pavage n'a pas besoin d'être régulier pour être élégant. Les pavages étudiés par Roger Penrose, parrain de ce salon, dans les années 1970 et qui portent aujourd'hui son nom font partie des plus célèbres pavages *apériodiques*. Quoique composés de seulement deux pièces différentes (la *fléchette* et le *cerf-volant*), leur agencement se renouvelle sans cesse et il n'existe pas deux endroits du plan d'où ils s'emboîtent de la même façon. Voyez la figure suivante, à gauche. À mon grand regret, je n'ai pas pu trouver, parmi ces réalisations, de tartes aux pavages de Penrose. Peut-être se trouvera-t-il, parmi nos lecteurs et lectrices, quelques pâtissiers pour réparer cet inadmissible oubli !



À gauche, pavage de Penrose, réalisé à l'aide de fléchettes et de cerfs-volants.

©*Herbert Kociemba, 2018*

À droite, la tuile (non connexe) de Socolar et Taylor.

©*Parcly Taxel, 2015*

Si les pavages de Penrose se composent de deux pièces distinctes, savoir s'il existe une forme de pièce qui, à elle seule, permet de paver le plan, mais uniquement de façon apériodique, fut longtemps une question ouverte. On l'appelle le *problème einstein*. Rien à voir toutefois avec le père de la relativité, « ein Stein » signifie simplement « une pierre » en allemand. Ce n'est qu'au début des années 2010 que Joshua Socolar et Joan Taylor y répondirent par l'affirmative en proposant la tuile reproduite ci-dessus à droite et qui porte aujourd'hui leur nom. Cette pièce possède toutefois un défaut : elle n'est pas *connexe*, c'est-à-dire qu'elle est composée de plusieurs morceaux qui ne se touchent pas, mais doivent tout de même être considérés comme solidaires les uns des autres. Le problème einstein avec une tuile connexe est, lui, toujours sans réponse en 2021. Roger Penrose pense qu'un tel objet pourrait exister.

Paris-Brest, millefeuilles, pizzas… et kek lapis Sarawak !

Si vous pratiquez la pâtisserie, la géométrie est une alliée sans pareille pour votre imagination. Ces quelques pages sont trop courtes pour vous en dresser un panorama complet. Encore aurait-il fallu parler de la topologie des Paris-Brest, des mille-feuilles (qui n'en ont en fait que 730, tout comme les croissants), ou encore du *théorème de la pizza*, qui, bien entendu, s'applique aussi aux tartes aux fraises.

J'ai découvert en écrivant cet article les kek lapis Sarawak, desserts de fête originaires de Malaisie. D'apparence anodine à première vue, ils ne révèlent leurs secrets qu'une fois coupés : des empilements de gâteaux multicolores s'y intriquent en trois dimensions pour former de magnifiques motifs. Coupez le kek lapis dans un sens ou dans un autre et sa tranche vous montrera un décor différent !

Tranches de *kek lapis Sarawak* confectionnés par la patissière sarawakienne Jennifer Chen.

Ainsi en va-t-il des mathématiques : parfois austères de l'extérieur, un coup de cuillère sans complexes vous en dévoilera bien des merveilles !

M. L.

Pour en savoir (un peu) plus

Théorie des nœuds : première preuve d'un algorithme de dénouage rapide. Philippe Pajot, *La Recherche*, 2021, disponible en ligne.

« The Rolfsen Knot Table. » Table des nœuds (The Knot Atlas), disponible en ligne.

« Le mystère de la farfalle. » Mickaël Launay, conférence pour la journée de pi, 2017, disponible en ligne.

Le numérique dans les arts

Denise Demaret-Pranville

Artiste plasticienne et photographe

Le numérique a révolutionné le paysage artistique du XX^{e} siècle et a progressivement envahi tous les domaines de l'art, que ce soient les arts graphiques, les arts du spectacle ou encore la photographie. Ainsi, la technologie et les mathématiques se mettent au service de l'art : les productions numériques s'appuient sur des programmes informatiques qui s'écrivent grâce aux mathématiques et qui peuvent parfois être considérés comme faisant partie des œuvres qu'ils génèrent.
L'art numérique est un nouvel outil pour l'artiste. Son évolution nous surprend toujours par les nouveaux territoires qu'il explore : on le retrouve en 2D, en 3D, statique ou en mouvement, passif ou interactif. Comment les artistes se sont-ils emparés du numérique ?

De la photographie argentique à la photographie numérique

S'il y a bien un domaine où le numérique a pris une place prépondérante c'est la photographie, qui apparaît au début du XIX^{e} siècle. En presque deux siècles, les photographes sont passés de tirages artisanaux à l'hégémonie du numérique au début du XXI^{e} siècle.
Au départ, la photographie nécessite de réunir trois conditions : disposer d'une chambre noire pour projeter une image inversée du sujet sur un support vertical, avoir un support enduit d'un produit chimique sensible à la lumière, fixer l'image obtenue grâce à un procédé chimique. Au début, les difficultés sont nombreuses : le temps de pose est très long, de plusieurs heures à plusieurs jours ; les images obtenues ne sont pas stables dans le temps ; surtout, elles ne sont pas d'une très grande précision. La première photographie reconnue comme telle a été réalisée en 1826 par l'ingénieur français Joseph « Nicéphore » Niépce (1765 – 1833). Ensuite, la technique photographique progresse très rapidement, grâce au peintre et photographe français Louis Daguerre (1787 – 1851), au mathématicien belge Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801 – 1883), au mathématicien britannique William George Horner (1786 – 1837), et à bien

d'autres. Les supports se multiplient (plaques de métal, verre, pellicule…) puis la couleur apparaît. Dans toute cette première phase, la photographie utilise des processus chimiques, on la qualifie d'*argentique* en référence aux sels d'argent présents sur les pellicules.

Point de vue du Gras, première photographie de Nicéphore Niépce en 1826. Saint-Loup-de-Varennes en Saône-et-Loire.

©*Rebecca A. Mos*

Dans les années 1980, de nombreuses recherches permettent d'envisager de remplacer ce processus chimique par un procédé numérique. Petit à petit, les appareils photographiques sont équipés de capteurs numériques qui mesurent l'intensité de la lumière et sa couleur. Ces informations sont ensuite codées numériquement et l'image est reconstituée sous forme de pixels.

Jeux de miroirs, géométrisation et transformation des images…

Le numérique a-t-il changé le regard des photographes ? Au tout début de son avènement, la photographie n'était pas considérée comme un art à part entière mais seulement comme un procédé technique pour reproduire la réalité. Elle a inquiété les peintres, qui voyaient en elle une potentielle concurrence à leur travail. Elle a pu aussi être rejetée car manquant de précision ou alors montrant la réalité avec trop de réalisme, alors que les peintres pouvaient enjoliver ce qu'ils voyaient. Néanmoins, lorsque la technique a fait des progrès, la photographie s'est révélée être un outil de création ; peu à peu, les photographes ont fait partie du paysage artistique, ont commencé à rechercher des compositions et à explorer tout le potentiel créatif de ce nouveau médium. La retouche photographique, souvent associée au numérique, était déjà pratiquée par de nombreux photographes argentiques.

La photographe suisse d'origine française Florence Henri (1893 – 1982) a travaillé sur les jeux de miroir, les compositions géométriques, et a parfois utilisé les photomontages. Elle a été influencée par les artistes du Bauhaus et a rencontré des photographes comme László Moholy-Nagy (1895 – 1946), Albert Renger-Patzsch (1897 – 1966) ou encore André Kertész (1894 – 1985).

Composition. Florence Henri, 1928.

Photo : Bauhaus Archiv

Verrerie d'Iena (ballons). Albert Renger-Patzsch, 1934.

Photo : D. D.-P., 2017 (musée du Jeu de paume)

John Anthony Baldessari (1931–2020) était un artiste conceptuel américain qui avait recours à la photographie. Il réalisait des photomontages en collant des formes abstraites, cercles ou rectangles, sur ses photographies.

Flottant : couleur. John Baldessari, 1972.

Le passage de l'argentique au numérique a permis d'accentuer cette recherche sur la composition, la transformation et la géométrisation des images. La retouche est devenue plus accessible grâce aux nombreux logiciels qui se sont développés.

Symétries, répétitions, mises en abîme et abstraction géométrique

Le photographe français Gilles Desrozier (né en 1963) nous fait rêver avec ses mondes imaginaires dans lesquels intérieur et extérieur se confondent. L'artiste franco-américaine Adine Sagalyn (née en 1959) réalise des compositions photographiques où l'abstraction et la géométrie ont leur place. Elle le revendique : *« Géométrie, rythme et résonances, voilà ce qui me guide lorsque je compose. »*

Inscape 008. Gilles Desrozier, 2008.

Carrément. Adine Sagalyn, 2015.

Photo : D. D.-P., 2019 *(Salon des Réalités nouvelles)*

Le « plasticien de l'image » Marc Chostakoff (né en 1961) nous entraîne dans des mondes maritimes impossibles avec sa série « Vides et eau » où la mer se fragmente sous nos yeux. Les villes imaginaires de l'« hyperphotographe » Jean-François Rauzier (né en 1952) nous font rêver. Pour les réaliser, il fait appel à la symétrie, à la répétition, à la mise en abîme. L'artiste chinois Yang Yongliang (né en 1980) introduit le rêve dans ses villes reconstituées, flottantes, éthérées. Le photographe français Thibault Brunet (né en 1982) se situe aux confins de la photographie et des mondes virtuels des jeux vidéo. Il a travaillé avec un scanner tridimensionnel qui enregistre son environnement sous forme d'un nuage de points transposé en 3D. Son nouveau projet en 2021 : *« En partenariat avec le collectif Conscience, je lance une mission d'exploration scientifique virtuelle dans le jeu vidéo Minecraft [Markus « Notch » Persson, 2009]. La mission est composée de six scientifiques provenant de laboratoires différents (CNRS, IGN, INRA), trois médiateurs, trois artistes, un garde du corps. »*

Versailles. Jean-François Rauzier, 2009.

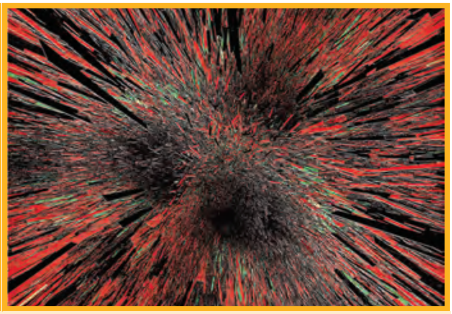
Ville du ciel. Yang Yongliang, 2006-2009.

De l'image numérique aux robots : les algorithmes à l'honneur

En parallèle de la photographie, l'image numérique générée par un programme informatique apparaît dès les années 1950. Les algorithmes ont été utilisés en art depuis longtemps, mais le développement des ordinateurs fait émerger de nouvelles pratiques algorithmiques. Au départ, les artistes utilisent des traceurs ; Manfred Mohr (né en 1938) et Vera Molnar (née en 1924) ont été des précurseurs. Puis, avec l'apparition de programmes de plus en plus en plus élaborés, la production d'images numériques se développe très rapidement sous des formes variées. Là encore les artistes se sont approprié ces nouvelles technologies et l'art numérique tient une place importante dans l'art contemporain. Jérémie Brunet (né en 1975), avec ses univers aux limites de l'imaginaire qui nous font visiter des cités perdues aux architectures futuristes, est l'un des représentants de l'art fractal numérique.

3D Burning Ship. Jérémie Brunet, 2010.

©Jérémie Brunet, 2010



Scowcza, 2021.

©Scowcza, 2021

Le collectif Scowcza met en avant l'art vectoriel, qui repose sur le concept de vecteur. Leur démarche artistique consiste à associer le dessin vectoriel aux gestes de la peinture. Il faut évoquer également Pierre Berger (né en 1938), artiste et critique d'art numérique qui a cherché à mettre l'intelligence artificielle à profit pour concevoir des robots capables de « peindre ». Son premier robot, Max, voit le jour en 1979, puis en 2001 c'est le « robot artiste peintre » Roxame qui est créé. À l'aide d'une base de données que l'on pourrait qualifier de « linguistique picturale », il permet à ses robots de « créer » des œuvres de manière autonome.

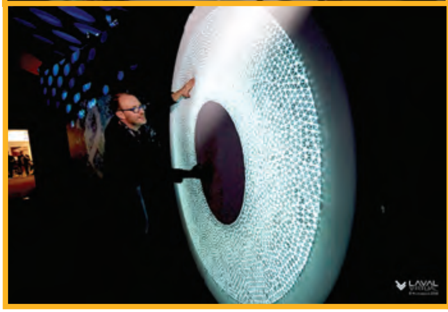
La création d'images virtuelles avec lesquelles il est possible d'interagir est une étape dans l'art numérique. Né en 1977, Mathieu le Sourd, alias Maotik, a réalisé en 2013 une performance immersive visuelle et sonore, « Dromos ».

Il s'est associé au musicien et compositeur Éric Raynaud, alias Fraction (né en 1975), pour produire ce spectacle dans lequel le spectateur est totalement immergé dans un monde virtuel où sons et images sont synchronisés. « Dromos » tire son nom du concept de *dromologie* – science de la vitesse –, exploré par le philosophe Paul Virilio (1932–2018).

Ci-contre : *« Dromos. »* Maotik, performance immersive au festival Mutek à Montréal, 2013. *©Maotik, 2013*

Ci-dessous à gauche : *Le rayon vert*. Hugo Verlinde et Mâa Barriett, 2018. *©Hugo Verlinde, 2018*

Ci-dessous à droite : *Pixel*. Centre chorégraphique de Créteil, 2014. *©Patrick Berger*



L'importante multiplication d'œuvres numériques ne permet pas de cerner tous les aspects de la création contemporaine. De nombreux lieux se sont spécialisés dans la diffusion de l'art numérique : le Cube à Issy-les-Moulineaux (Hauts-de-Seine), le théâtre de la Gaîté-Lyrique à Paris (qui a été transformé en centre d'art numérique). Les expositions et les expériences se multiplient. La galerie Abstract Project à Paris, qui est une émanation du salon des Réalités nouvelles, a déjà programmé quatre expositions consacrées à l'art numérique. Quoi qu'il en soit, lorsque le numérique est présent dans une œuvre artistique, il est indéniable que les mathématiques et la physique ne sont pas bien loin !

D. D.–P.

Pour en savoir (un peu) plus

Dossier « Arts numériques ». *Tangente* 199, 2021.

L'art génératif. Pierre Berger et Alain Lioret, L'Harmattan, 2012

Les univers de Conway

Jacky Cresson

Professeur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

L'Univers fait rêver. Ce simple mot nous fait imaginer galaxies, trous noirs et autres objets fascinants. Le prestigieux parrain du salon 2021 en sait quelque chose !

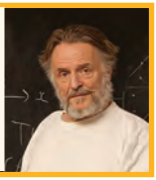
Les théories physiques qui sont à la base de notre compréhension du monde sont souvent ardues ; il est difficile de toucher des questions profondes sans faire appel à des mathématiques avancées. Essayons pourtant de nous y risquer à l'aide d'un petit modèle mathématique à la portée de tous*. La question qui va nous occuper est la suivante : est-il raisonnable de chercher les lois de notre Univers ? Plus précisément : est-il raisonnable de penser qu'il y a des lois, et si oui est-il possible de les trouver ?

Les lois de la nature, les univers de Conway et le jeu de la vie

Il est possible d'étudier ces questions sur des univers plus « simples », appelés ici *univers de Conway*, tout en suivant les idées de Stephen Hawking. Ils correspondent à une interprétation du *jeu de la vie*, inventé par le mathématicien britannique John Conway lorsqu'il cherchait un ensemble de lois élémentaires permettant l'existence d'objets s'auto-répliquant. Ce jeu n'en a que le nom puisqu'il n'y a pas de joueurs, mais un ensemble de lois créant ainsi un univers.

Stephen William Hawking (1942 – 2018).

© *Lwp Kommunikáció, flickr.com*



John Horton Conway (1937 – 2020).

© *Denise Applewhite, Office of Communications, Princeton University*

Existe-t-il des lois de la nature ? Poser cette question n'a rien d'anodin. Pour le mathématicien français Émile Borel (1871 – 1956), *« il paraît incontestable qu'au point de vue pratique […] la croyance en ces lois est pour nous une nécessité : nous ne pourrions pas nous endormir si nous n'étions pas assurés que le soleil se lèvera demain. De même, on concevrait difficilement l'existence d'un homme, qui lâchant une pierre au-dessus de son pied, ne s'attendrait*

* Cet article résume une activité menée auprès d'élèves de collèges, lycées (dans le cadre de MATh.en.JEANS) et de professeurs du secondaire (dans le cadre d'une formation de la Maison pour la science en Aquitaine).

pas à la voir tomber et à avoir le pied écrasé». (le Hasard, 1932).On présuppose en quelque sorte que le monde qui nous entoure est compréhensible et que certaines règles, certes cachées, permettent de l'approcher et de soulever le voile du mystère. Pour Albert Einstein (1879 – 1955), cette attitude est une sorte de *«religiosité cosmique»* et *«la recherche des lois élémentaires […] à partir desquelles, par pure déduction, on peut acquérir l'image du monde»* constitue la *«tâche suprême du physicien»*. (Œuvres choisies d'Einstein, Le Seuil, volume 5, «Science, éthique, philosophie», édité par Jacques Merleau-Ponty et Françoise Balibar, 1989).

Mais qu'est-ce qu'une «loi de la nature»? Nous dirons ici qu'une *loi* permet de faire un lien de cause à effet entre une certaine disposition de l'univers et un phénomène observé. Pour atteindre le statut de loi *de la nature*, la règle obtenue doit être universelle, aussi bien en temps qu'en espace. L'exemple de la gravitation de Newton permet d'expliquer ces deux nécessités : le phénomène fut d'abord observé sur Terre, mais à différents moments elle possédait les mêmes propriétés; on supposa donc qu'elle était universelle en temps. L'observation du cheminement des planètes montra que la théorie permettait encore d'expliquer des phénomènes au niveau de notre système solaire. Le caractère universel de la loi pouvait alors être supposé. La gravitation devenait une loi de la nature.

Une fois convaincu qu'elles existent, encore faut-il les trouver!

Les univers de Conway ont tous la même apparence. L'*univers* est constitué d'une grille rectangulaire finie (on ne sait pas *a priori* si la grille représente la totalité de l'univers qui est observé ou simplement sa partie observable). À un instant donné, les «cases» de la grille peuvent être soit vides (cases blanches), soit matérielles (cases noires).
Les univers de Conway possèdent une dynamique. Ils évoluent suivant des lois fixées et en nombre fini qui modifient l'aspect de la grille. Pour observer cette dynamique, on part d'une distribution de matière initiale et on applique les lois à la grille. On obtient une nouvelle grille, qui sera considérée comme l'évolution dans le temps de cette distribution. Ces lois ne nous sont pas connues.

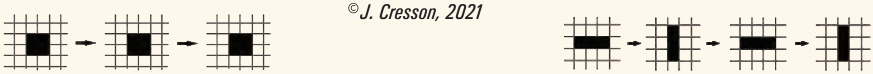
Un exemple d'univers.

©*Davin Khor, 2021*

L’observateur a seulement accès à l’évolution de distributions données *via* un simulateur (en ligne, voir par exemple **https://copy.sh/life**, développé par William Gosper dès 1984). Cette évolution est *a priori* discrète : on peut compter le nombre d’étapes d’évolution effectuées. Mais le fait de ne percevoir que des configurations successives veut-il dire que l’univers observé ne peut pas par ailleurs avoir une évolution continue ?
Pour mesurer le chemin parcouru par l’humanité entre sa découverte du monde et les théories physiques actuelles, procédons en deux étapes. Dans un premier temps, observons des dynamiques spécifiques mises à disposition, sans avoir la possibilité de faire des modifications de la situation initiale. Dans un second temps, les observateurs auront la possibilité de faire une expérience, c’est-à-dire de choisir une configuration initiale et d’étudier son évolution.

Mise en place de la méthode expérimentale : premières observations

Observons donc des évolutions dans notre univers avec une répartition initiale de matière (dans notre simulateur, sélectionner Randomize et appuyer sur Run). Ces évolutions font apparaître des agrégats de matière, les *entités*. Certaines vont disparaître, plus ou moins rapidement, d’autres ne bougent pas, ou se modifient en passant par différentes configurations avant de revenir à leur forme initiale, et d’autres enfin sont si sophistiquées que nous ne savons pas quoi considérer exactement.



Un *bloc*. Un *oscillateur* ou *clignotant*.

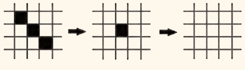
Regardons l’oscillateur. L’évolution entre les deux configurations est vue comme un mouvement de la barre horizontale (qui devient barre verticale). Cette identification entre les deux barres nécessite d’introduire le concept de « mouvement ». L’observateur va donc désigner par des mots certains « objets » et introduire des « concepts ». Une classification des objets va permettre d’organiser l’observation d’un univers de Conway. Les lois de comportement mises sur les entités (« le bloc est immobile », « la barre oscille »…) vont nous aider à ébaucher un début de théorie physique.

L’âge des expériences : une période enthousiasmante !

Dans la seconde phase, les observateurs peuvent réaliser leurs propres expériences. C’est une période enthousiasmante : chacun se voit découvrir les lois du monde qu’il observe. Souvent, l’expérimentation n’est pas réfléchie ou organisée, et beaucoup vont tester des formes variées sans suite logique. Voyant que cela ne les aide pas à découvrir de règles, ils vont progressivement se rapprocher de la méthode scientifique en conduisant des expériences pensées. C'est une réflexion sur les structures à nombre de cases fixées qui va ensuite s'imposer : formes ayant une, puis deux, puis trois (…) cases matérielles, et évolution de ces formes. La case matérielle et son comportement vont donc devenir un objet essentiel. C'est la phase de réduction des propriétés des objets à leur constituant élémentaire (ici, la case matérielle).

Très vite, la première loi émerge : une case matérielle isolée disparaît. Comment a-t-elle a été obtenue ? Si c'est simplement par l'essai d'une case prise au hasard sur la grille, cela ne permet pas de donner le statut de loi à cette observation. Il convient de s'assurer qu'en chaque point de l'univers la loi est respectée. La démarche est la suivante : on teste la validité de la loi en plusieurs endroits de l'univers accessibles ; si la loi est respectée, alors on suppose qu'elle est valable en tout point de l'univers, exactement comme le font les physiciens. Une fois l'universalité spatiale réglée, il faut aussi étudier l'universalité temporelle. Bien entendu, on peut observer de longues évolutions d'une configuration, mais l'éternité c'est long… On fait donc, en l'absence de violation de notre loi, l'hypothèse qu'elle sera toujours valable. Cette stabilité des lois physiques au cours du temps est fondamentale, et ne fut historiquement remise en question que rarement. Nous avons donc obtenu une première loi de notre univers de Conway !

Les configurations de deux cases vont modifier notre première loi. Une case matérielle M possédant moins d'une case matérielle voisine produit une case vide. Le nombre V(M) de cases matérielles voisines de M (les huit cases qui l'entourent) est important. Notre première loi va toutefois se révéler insuffisante pour expliquer les observations d'entités à trois cases matérielles. L'exemple d'évolution ci-dessous nous conduit à avancer qu'une case matérielle M persiste si V(M) = 2 et disparaît si V(M) = 0 ou 1.

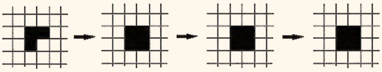


Une évolution à partir de trois cases matérielles.

©J. Cresson, 2021

Cette modification de la loi n'est toutefois pas suffisante pour expliquer l'observation suivante. En effet, notre loi, même modifiée, prévoit la stabilité de la forme initiale, mais pas la création de la case matérielle. Il faut donc aussi énoncer une loi sur les cases vides.

Loi 2 : soit E une case vide et V(E) le nombre de case matérielles voisines de E. Si V(E) = 3, alors la case devient matérielle.



Une autre évolution à partir de trois cases matérielles.

©*J. Cresson, 2021*

Cette loi sur les cases vides nous pousse à une étude systématique du comportement d'une case vide en fonction de la nature des cases voisines. La version complète de la loi 2 qui s'impose est alors la suivante : si E est une case vide, alors E devient matérielle si V(E) = 3, sinon E reste vide. Cette stratégie est alors adaptée aux cases matérielles. On montre que la formulation complète de la première loi est : Loi 1 : soit M une case matérielle. Alors M persiste si V(M) = 2 ou 3, sinon M disparaît.

La topologie des univers de Conway

Nos deux lois semblent suffisantes pour expliquer les phénomènes observés. Une question naturelle se pose alors : avons-nous récupéré toutes les lois de notre univers ? En fait, pas tout à fait. Toutes les expériences précédentes se sont faites loin du bord de la grille, pour ne pas être dans une situation atypique. Or, ce bord de l'univers va nous réserver quelques surprises…

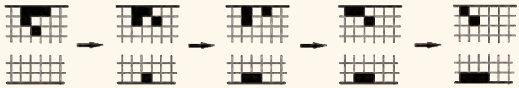
Il existe différentes variantes des univers de Conway, qui reposent sur un changement de comportement sur le bord de l'univers observable. Considérons un « objet » qui se déplace sur la grille jusqu'à atteindre le bord, par exemple un planeur.

Le *planeur*.

Type I : pas de conflit avec les lois mises en évidence.

©*J. Cresson, 2021*

Cet objet traverse la grille en diagonale et atteint donc l'un des quatre bords, suivant la configuration initiale. On observe trois types de comportements au bord de la grille. Dans le type II, l'objet disparaît de la grille, quelle que soit sa configuration d'arrivée au bord. Cela entre en contradiction avec nos lois ! Une première solution consiste à modifier les lois sur le bord. C'est insatisfaisant, car *a priori* incompatible avec notre notion de loi universelle. Une autre idée est de supposer que ce bord n'est qu'une limite d'observation, et que la grille se continue *a priori* à l'infini. Dans ce cas, en continuant d'appliquer nos lois, on explique complètement les observations. C'est un changement important de point de vue car on modifie profondément la vision de notre univers ! La simplicité de cette solution, couplée au fait que les lois restent inchangées, nous pousse à la préférer.



Type III : conflit avec les lois connues.

© *J. Cresson, 2021*

Dans le type III, là encore, nos lois ne permettent pas d'expliquer les observations. Une modification des lois au bord serait encore possible, mais vraiment très compliquée. Une idée plus radicale est de supposer encore une fois nos lois vraies mais que l'univers que nous observons n'est pas une grille finie ou infinie, mais un *tore*, obtenu en recollant chacun des bords opposés. On remplace la complexité des lois sur le bord par une complexité géométrique sur l'espace dans lequel on évolue.

La question de la «*topologie cosmique*» de notre univers physique, ainsi nommée par l'astrophysicien Jean-Pierre Luminet (né en 1951), est actuelle et difficile car il faut déterminer les effets observables d'une topologie donnée par rapport à une autre. Sans les mathématiques, ces questions seraient difficilement intelligibles.

Un tore est la forme d'une bouée, ou d'un beignet de type *doughnut*.

© *Tim Hutton, 2012*

La flèche du temps : les lois ne sont pas réversibles

Les univers de Conway possèdent une «flèche du temps». Les lois ne sont pas réversibles. Si vous mettez le film de l'évolution d'une séquence à l'envers, vous noterez rapidement que ce n'est pas l'univers que vous connaissez. De ce point de vue, les univers de Conway sont différents du nôtre. La plupart des lois de la physique sont réversibles au niveau macroscopique, alors que notre univers dans son entier est irréversible. On complète donc nos lois dynamiques par le *second principe de la thermodynamique*, portant sur une quantité appelée *entropie* qui, comme le souligne Roger Penrose, ne peut pas se déduire des lois de la dynamique et constitue encore aujourd'hui un «*profond mystère*».

On peut continuer cette exploration des univers de Conway de bien des façons : observer l'effet d'une modification des lois obtenues ou de l'introduction d'une part de hasard, étudier l'effet de ces lois sur des topologies d'univers plus élaborées, essayer d'obtenir la classification des formes stables… Mais à ce stade, nous avons d'ores et déjà acquis une certitude : si des univers comme ceux de Conway sont aussi riches, alors celui dans lequel nous vivons nous réserve encore bien des surprises !

J. C.

Les jeux et compétitions mathématiques

Michel Criton
Président de la Fédération française des jeux mathématiques

Les compétitions mathématiques sont aujourd'hui très nombreuses en France, en Europe et dans le monde. Il en existe de toutes sortes, s'adressant à des publics très variés et prenant des formes étonnamment différentes (individuelles ou en équipe, dans une salle ou en plein air… voir plus loin !). Le niveau de chaque compétition est fixé en fonction de l'âge et des compétences mathématiques du public visé, avec pour chacune d'elles un curseur déterminant le dosage entre caractère ludique et aspect purement mathématique.

Le but de ces compétitions est bien sûr de donner le goût des mathématiques, si possible avec des thèmes qui sortent des contenus purement scolaires, lesquels ne suffisent pas toujours à motiver les jeunes élèves ou à satisfaire leur appétit et leur curiosité.

La Hongrie, pionnière en matière de compétitions mathématiques

Si l'on excepte le très élitiste Concours général créé en France par l'abbé Legendre en 1744, la première compétition mathématique destinée à toucher un large public date de 1894. Il s'agit de la compétition Eötvös, organisée en Hongrie pour les lycéens à l'initiative du baron Loránd Eötvös (1848–1919), physicien de renom alors ministre de l'Éducation en Hongrie et fondateur de la Société hongroise de mathématique et de physique.

L'action initiée par Eötvös fut poursuivie par l'un de ses concitoyens, le mathématicien József Kürschák (1864–1933). Cette compétition de mathématiques et de physique a eu une influence certaine sur la vitalité de l'école mathématique hongroise au cours du XXe siècle en donnant à de nombreux jeunes le goût de la résolution de problèmes.

Ce timbre émis en 1991 en Hongrie rend hommage à Loránd Eötvös.
Crédit : Domaine public

1. Un problème issu de la première compétition Eötvös

Prouvez que les expressions $2x + 3y$ et $9x + 5y$ sont divisibles par 17 pour le même ensemble de valeurs entières de x et y.

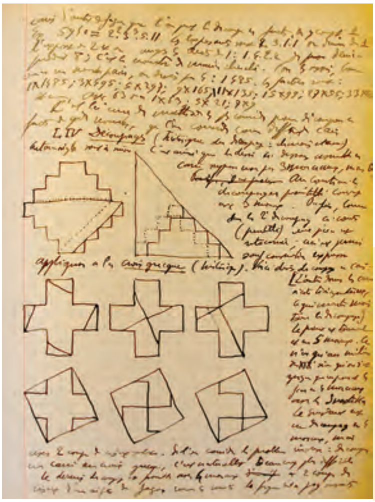
À la même époque, un engouement pour les récréations mathématiques naissait en France. Le mathématicien Édouard Lucas (1842 – 1891) considérait que toute notion mathématique pouvait être illustrée par un jeu (voir la brochure *Maths Jeux Culture Express* éditée en 2019 par le CIJM). Ensuite, dans la première moitié du XX^{e} siècle, de nombreux spécialistes de grand talent s'intéressèrent aux mathématiques récréatives.

L'aventure des revues dédiées, le paradis des « amateurs »

André Gérardin (1879 – 1953).
Crédit : Domaine public

En 1905, un mathématicien amateur de Nancy (Meurthe-et-Moselle), André Gérardin, publie la revue mensuelle *Sphinx-Œdipe*, dont le contenu est centré sur la théorie des nombres et les récréations mathématiques. Cette petite revue, qui s'adresse à un public d'amateurs, paraîtra jusqu'à la fin des années 1920.

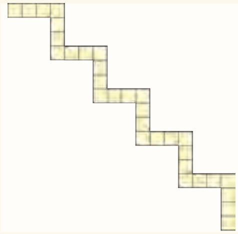
Cette entreprise sera poursuivie par le mathématicien belge Maurice Kraitchik (1882 – 1957) avec *Sphinx, revue mensuelle des questions récréatives*, dont l'influence sera prolongée par l'organisation de deux congrès internationaux : le premier à Bruxelles en 1935 à l'initiative de Kraitchik lui-même, le second à Paris en 1937, organisé par André Sainte-Laguë (1882 – 1950), responsable du département mathématique du Palais de la découverte.



Les carnets laissés par André Sainte-Laguë comprennent des centaines de pages passionnantes consacrées aux mathématiques récréatives. Ils ont été légués récemment par sa petite-fille à la bibliothèque du Conservatoire national des arts et métiers, où le mathématicien était enseignant.

© É. Thomas, 2016 (photo réalisée avec le concours d'Alain Zalmanski)

2. Un problème de la revue *Sphinx* (janvier 1933) : l'escalier de cubes



Inscrivez à raison d'un chiffre par case dix nombres de quatre chiffres égaux à des cubes d'entiers. Les nombres se lisent de gauche à droite et de haut en bas. Le premier chiffre de chaque nombre est différent de 0.

Après la Seconde Guerre mondiale, en France, seule la revue *Le Facteur X* (de 1953 à 1964), créée par André Fouché pour un jeune public (à partir du collège), poursuit ce courant mathématico-ludique.

3. Un problème du *Facteur X* : eau et glace

Dans un verre cylindrique dont la base a une aire de 18 cm^2, on verse de l'eau, puis on y met un cube de glace de 3 cm de côté. La glace flotte sur l'eau et le niveau de l'eau est alors à 7 cm au-dessus du fond du verre. On demande quelle sera la hauteur du niveau de l'eau quand la glace aura entièrement fondu.
Note : la densité de la glace est environ 0,9.

Des divertissements intellectuels remis au goût du jour

C'est Pierre Berloquin, ingénieur de formation, surtout connu comme créateur de jeux et *ludographe* (terme qu'il a lui-même forgé dans les années 1970), qui relancera l'intérêt pour les jeux mathématiques et logiques en proposant la rubrique « Jeux & Paradoxes », qui paraîtra de 1964 à 1986 dans le magazine *Science & Vie*, et dans le journal *Le Monde* avec la rubrique « En toute logique » dans l'encart hebdomadaire consacré aux sciences et techniques (de 1973 à 1984).

Pierre Berloquin a su remettre ces divertissements intellectuels au goût du jour, alors que ces jeux connaissaient depuis un certain temps déjà un véritable engouement dans les pays anglo-saxons grâce aux Américains Martin Gardner (1914 – 2010), Raymond Smullyan (1919 – 2017), Solomon Wolf Golomb (1932 – 2016), Douglas Richard Hofstadter (né en 1945) et quelques autres passionnés de vulgarisation de la culture mathématique, qui étaient alors inconnus en France.

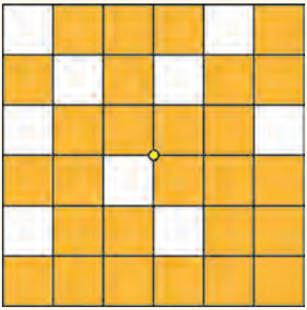
Ce n’est également que dans la seconde moitié du XX^{e} siècle que le rôle des compétitions mathématiques dans la formation et la motivation des jeunes pour les disciplines scientifiques a pu être plus largement reconnu. On peut citer notamment les Olympiades internationales de mathématiques, créées en 1959 dans l’ex-URSS. Cette compétition, à laquelle participaient initialement seulement des pays d’Europe de l’Est, s’ouvrira progressivement à un plus grand nombre de délégations, la France y étant présente depuis 1967. En 1973, Georges Glaeser (1918–2002) créa le Rallye mathématique d’Alsace ; il fut d’ailleurs le premier à utiliser le terme « rallye » pour désigner une compétition mathématique.

En 1980, le Tournoi des villes est créé par Nikolay Nikolayevitch Konstantinov (né en 1932). À près de 90 ans, Konstantinov est toujours très actif à Moscou, tant dans l’enseignement que dans l’édition.

Le Championnat international des jeux mathématiques et logiques est lancé en 1987 par la Fédération française des jeux mathématiques. Le Concours Kangourou des mathématiques est créé en 1991. La coupe Euromath des régions est inaugurée en 2000, proclamée « année mondiale des mathématiques » par l’Unesco (Organisation des Nations unies pour l’éducation, la science et la culture), dans le cadre du premier Salon Culture et Jeux mathématiques organisé par le Comité international des jeux mathématiques.

4. Un problème du premier Championnat des jeux mathématiques et logiques

On appelle *grille de Mathias* un cache de couleur, ayant la forme d’un quadrillage 6 × 6 qui laisse apparaître le quart des cases blanches d’un damier fixe de même forme situé sous ce cache. Lorsque le cache effectue trois rotations d’un quart de tour, il laisse alors apparaître une fois et une seule chacune des cases blanches du damier.



Combien existe-t-il de grilles de Mathias différentes ayant une case évidée en haut à gauche ?

Des compétitions pour tous les goûts : il en existe une pour vous !

Depuis, les compétitions mathématiques se comptent par dizaines. Locales, régionales, nationales, internationales voire intercontinentales, elles s'adressent à tous les niveaux, du début de l'école primaire à l'université, et à tous les publics, des plus aguerris aux plus débutants. Il en est d'individuelles, d'autres par binôme, par équipes plurigénérationnelles ou par classes. Un grand nombre de ces compétitions mathématiques sont fédérées au sein du Comité international des jeux mathématiques, créé en 1994. Ce Comité organise depuis 2000 chaque année fin mai à Paris une grande manifestation autour de la culture et des jeux mathématiques destinée au public le plus large. Il publie également des recueils « Panoramath » (sept volumes disponibles à ce jour), véritables instantanés des compétitions mathématiques.

M. C.

Pour en savoir (un peu) plus

Les énigmes de Canterbury. Henry Ernest Dudeney, Fantaisium, deux volumes, 2018.

500 casse-tête. Henry Ernest Dudeney, Fantaisium, 2019.

Haha ou l'éclair de la compréhension mathématique. Martin Gardner, Pour la science, 1992.

Soyez fous ! Raymond Smullyan, Dunod, 2007 (regroupe les trois classiques ***Quel est le titre de ce livre ?***, ***le Livre qui rend fou*** et ***Ça y est, je suis fou !***).

Oh, les maths ! Yacov Isodorovitch Perelman, Dunod, 1992.

***Jeux mathématiques du* Scientific American**. Martin Gardner, Association pour le développement de la culture scientifique, 1996.

L'affaire Olympia. Mickaël Launay, Le Pommier, 2013.

80 petites expériences de maths magiques. Dominique Souder, Dunod, 2008.

***Jeux mathématiques et* vice versa.** Gilles Dowek, Jean-Pierre Bourguignon, Jean-Christophe Novelli et Benoît Rittaud, Le Pommier, 2005.

Drôles de maths ! Tutti frutti d'énigmes d'hier et d'aujourd'hui, d'Hanoï et d'ailleurs. Collectif, Vuibert, 2008.

Réponses aux énigmes

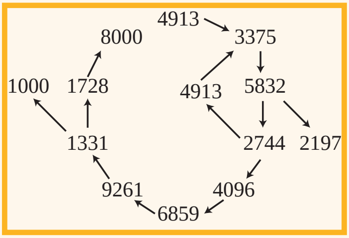
1. Soient x, y et k des entiers tels que $2x + 3y = 17k$.
On a alors $26x + 39y = 13 \times 17k = 17(x + 2y) + 9x + 5y$,
d'où $9x + 5y = 17(13k - x - 2y)$.

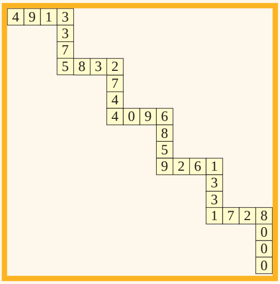
L'entier $9x + 5y$ est donc divisible par 17.

Dans l'autre sens, soient x, y et k' tels que $9x + 5y = 17k'$. On peut écrire :
$36x + 20y = 4 \times 17k' = 17(2x + y) + 2x + 3y$.
On en déduit : $2x + 3y = 17(4k' - 2x - y)$.

L'entier $2x + 3y$ est donc bien divisible par 17.

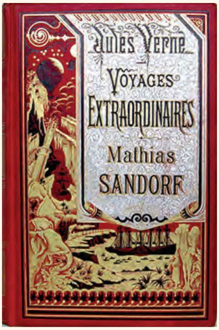
2. Il n'existe que treize cubes de quatre chiffres, dont aucun ne commence par un 7. Par ailleurs, de par leur forme, les nombres 1 000 et 8 000 ne peuvent éventuellement être utilisés qu'à une extrémité de l'escalier.





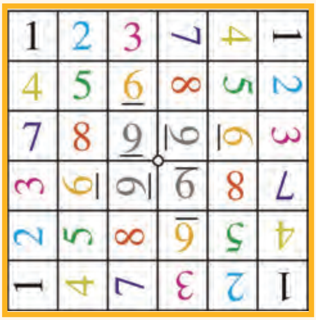
3. La hauteur du niveau de l'eau est inchangée. En effet, la glace fondue occupe exactement le volume de la partie immergée du glaçon !

4. Pour réaliser une telle grille, il suffit de partager le damier en 9 ensembles numérotés de 1 à 9, de 4 cases chacun, comme sur la figure, puis de choisir une case à évider dans chaque ensemble de 4 cases. Pour l'ensemble numéroté 1 on a choisi la case en haut à gauche, il reste une case à choisir parmi 4 dans chacun des 8 autres ensembles. On aura donc au total 4^8, soit 65 536, grilles de Mathias possibles.



De telles grilles sont décrites par Jules Verne dans son roman *Mathias Sandorf*, édité en 1885 par Pierre – Jules Hetzel.

©*P. A. CIJM*



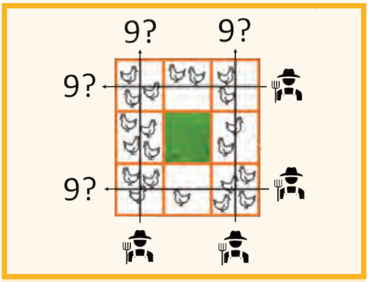
Le problème du fermier paresseux

Guillaume Reuiller

Médiateur scientifique au Palais de la découverte

Un fermier possède un poulailler. Au centre : une pelouse pour que les poules puissent se dégourdir les pattes. Autour d'elle : huit casiers pour que les gallinacés puissent dormir et couver. Chaque soir, notre fermier fait le décompte de ses fidèles pondeuses, d'une façon à la fois paresseuse, originale et, pour tout dire, assez inefficace… Jugez plutôt : il ne les compte pas casier par casier, mais préfère se positionner dans chaque alignement complet de trois casiers pour déterminer le nombre total de poules qu'il y aperçoit. S'il est toujours de 9, il estime qu'elles sont toutes rentrées. Comment peuvent-elles alors être réparties dans les casiers ?

Le problème a été posé ainsi aux participants d'un atelier en ligne proposé lors du salon déMATHérialisé de 2020. Cette formulation se veut attrayante, pour donner envie de s'attaquer au problème, et suffisamment ouverte pour donner lieu à des investigations intéressantes. Et les joueurs, à l'aide de bouts de papier, de pions ou de céréales (à défaut d'avoir de vraies poules sous la main), ne se sont pas gênés pour expérimenter, se poser des questions, établir des conjectures, essayer de les démontrer. Bref : explorer le problème. Ce que vous êtes invités à faire !



L'énoncé du problème.

©G. Reuiller, 2021

Expérimentations dans la basse-cour !

Le chiffre 9 n'a pas été choisi au hasard : avec ce nombre de poules par alignement, il est très facile de trouver une, voire plusieurs solutions au problème. Surtout si le joueur dépasse une contrainte « psychologique » (c'est-à-dire qu'il s'est imposée de lui-même sans qu'elle soit stipulée) : il n'est nullement tenu de remplir toutes les cases !

3	3	3
3		3
3	3	3

4	1	4
1		1
4	1	4

1	7	1
7		7
1	7	1

0	9	0
9		9
0	9	0

2	5	2
5		5
2	5	2

Quelques répartitions possibles, mobilisant respectivement vingt-quatre, vingt, trente-deux, trente-six et vingt-huit poules.

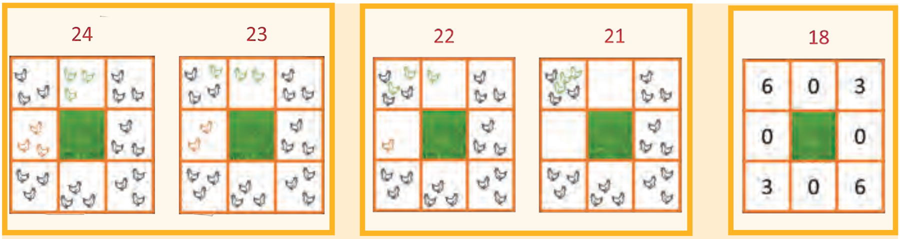
© G. Reuiller, 2021

Le but est d'avoir rapidement un panel assez large de possibilités, pour amener les participants de l'atelier à se poser des questions assez naturelles :

- Toutes les solutions sont-elles symétriques ? Comme ce sont les plus simples à trouver, souvent les joueurs n'obtiennent que des solutions symétriques. Du moins au début. Puis les premiers contre-exemples arrivent…
- Pourquoi le nombre total de poules n'est-il pas toujours le même ? Les participants à cet atelier étaient, en général, très surpris de constater qu'ils trouvaient des solutions différentes, certes, mais mobilisant de plus des nombres de poules différents ! Sans parler de système de quatre équations à huit inconnues, un simple constat permet de le comprendre : les poules placées dans les casiers aux coins, contrairement aux casiers des milieux, sont comptées deux fois. On peut donc diminuer (ou augmenter) le nombre total de volatiles en en faisant passer d'un casier central à un casier en coin (ou l'inverse). Cette remarque offre en fait une clé de compréhension de la situation proposée et un levier très efficace pour explorer le problème.
- Quelles valeurs peut prendre le nombre total de poules ?
- Combien y a-t-il de répartitions possibles des poules répondant à la contrainte du fermier ?

Discours sur la méthode… du fermier

Si le but réel de notre éleveur est de s'assurer qu'il a, tous les soirs, le même nombre total de volatiles, nous pouvons nous interroger sur l'efficacité de sa méthode ! Partons de la solution à trois poules par casier. Elle mobilise vingt-quatre gallinacés. Si une poule part du casier central de la première ligne pour aller dans le casier à sa gauche, il y en a toujours 9 sur la première ligne, mais il y en a 10 sur la première colonne. Une cocotte du casier central de la première colonne peut donc prendre la poudre d'escampette sans que le fermier ne s'en rende compte : il verra toujours neuf poules par alignement alors qu'au total il en a perdu une. Cette opération peut être reproduite encore deux fois : une poule passe du casier central de la première ligne vers le casier à sa gauche, et une cocotte du casier central de la première colonne se fait la malle. Il n'y a alors plus que vingt-trois, vingt-deux puis vingt et une poules au total, mais toujours neuf par alignement de trois cases.



Comment trois, puis six poules peuvent quitter le poulailler, sans que le fermier ne s'en aperçoive...

© G. Reuiller, 2021

Nous pouvons encore continuer à « vider » ainsi le poulailler, en faisant descendre une à une les trois poules du casier central de la troisième colonne, et en vidant celui de la dernière ligne, pour se retrouver successivement avec un total de vingt, dix-neuf et dix-huit volatiles. Dans cette dernière situation, tous les casiers centraux sont vides : il n'est plus possible de déplacer des volatiles vers les casiers dans les coins. Toutes les poules restantes sont « maximisées » : elles sont comptées deux fois chacune. 18 est donc le nombre minimum de volailles que possède le fermier.

À l'inverse, en faisant passer des ovipares d'un casier en coin à un casier central, il est possible de faire rentrer des poules en douce : le total des gallinacés sera passé successivement de 24 à 27. En vidant successivement tous les coins, nous pouvons monter, oiseau par oiseau, jusqu'à un total de 36, qui est un maximum (toutes les poules sont alors dans des casiers centraux, donc sont « minimisées » car comptées une seule fois). Et le fermier verra toujours ses neuf fidèles pondeuses sur chaque alignement complet de trois casiers ! Les poules peuvent atteindre tous les effectifs de 18 à 36, soit passer du simple au double, sans que le fermier ne s'en aperçoive. Elles peuvent donc tranquillement faire le mur ou inviter des copines, sans souci du qu'en-dira-t-on !

Comment trois, puis douze poules peuvent entrer dans le poulailler, sans que le fermier ne s'en aperçoive.

© G. Reuiller, 2021

Trouver toutes les solutions ? L'algèbre à la rescousse !

Une fois qu'ils avaient compris le principe, les participants de l'atelier finissaient tous par arriver à ce résultat, en manipulant en direct leurs petits objets sur un quadrillage. En revanche, la dernière question sur le nombre de configurations possibles n'était jamais traitée et laissée en suspens. De fait, le dénombrement complet des solutions différentes est très loin d'être immédiat. Il faut d'abord s'entendre sur la signification de « différentes » : pour nous, deux solutions le sont si aucune ne peut être obtenue à partir de l'autre en la faisant tourner ou en utilisant un axe de symétrie. Il faut surtout dénombrer, pour chaque nombre total possible de poules entre 18 et 36, toutes les solutions correspondantes !

Un peu d'algèbre nous sera utile. Notons de A à H les nombres de poules dans chacun des huit casiers, et S le nombre total de volatiles : $S = A + B + C + D + E + F + G + H$. Puisque $A + B + C = F + G + H = 9$, on peut écrire que $D + E = S - 18$. De même, $A + D + F = C + E + H = 9$ nous donne $B + G = S - 18$.

$$A+B+C+D+E+F+G+H = S$$
$$9 \quad +D+E+ \quad 9 \quad = S$$
$$D + E = S\text{-}18$$
$$B + G = S\text{-}18$$

Algébrisation du problème.

© *G. Reuiller, 2021*

Combien y a-t-il de solutions à dix-huit poules ?
Si S vaut 18, nécessairement $D = E = B = G = 0$: un total de 18 ne peut s'obtenir qu'en vidant complétement les casiers centraux. Reste alors à placer les dix-huit volailles dans les coins, en sachant que la somme des poules dans deux coins adjacents vaut nécessairement 9. Fixer la valeur dans deux coins adjacents fixe immédiatement la valeur dans les deux autres, donc trouver toutes les solutions à 18 revient en fait à regarder toutes les façons d'écrire 9 comme somme de deux nombres entiers : $9 = 0 + 9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$. Cela nous donne cinq solutions.

9	0	0
0		0
0	0	9

8	0	1
0		0
1	0	8

7	0	2
0		0
2	0	7

6	0	3
0		0
3	0	6

5	0	4
0		0
4	0	5

Il existe cinq configurations possibles avec un total de dix-huit poules.
Et seulement une avec trente-six poules.

0	9	0
9		9
0	9	0

Combien existe-t-il de solutions avec trente-six gallinacés ?
En remplaçant S par 36, on obtient $B+G=D+E=36-18=18$, qui ne peut être réalisé que si $B=G=D=E=9$: il n'existe qu'une seule solution à trente-six poules, constituée de neuf animaux dans chaque casier central et aucun dans les coins.

Combien y a-t-il de solutions à vingt-quatre poules ?
Nous n'avons pas trouvé de méthode simple et élégante permettant de répondre à cette question, et n'avons pas voulu utiliser d'ordinateur. Voici comment nous avons procédé. En remplaçant S par 24 dans les relations précédentes, on apprend que la somme des nombres de poules des casiers centraux des deux colonnes et des deux lignes complètes vaut 6. Or il n'y a que quatre façons d'écrire 6 comme somme de deux nombres entiers, qui nous donnent autant de combinaisons possibles pour les couples (D, E) et (B, G) : $6=0+6=1+5=2+4=3+3$.
Explorons un premier cas : $D=B=0$ et $E=G=6$. Hélas ! La donnée de ces quatre valeurs ne suffit pas à déterminer une solution unique : il y a plusieurs façons de finir de remplir la grille. En fait, une donnée supplémentaire impose une unique solution : si vous remplissez une case en coin, les autres s'obtiendront par soustraction à partir de la somme imposée. L'idée est donc de fixer une position de coin (en haut et à droite par exemple), de décliner toutes les valeurs possibles qu'elle peut contenir, puis de finir de remplir la grille. Mesurez toute la lourdeur de cette méthode : il faut trouver toutes les solutions pour chacun des duos de combinaisons, en faisant bien attention de ne pas compter deux fois la même ! Vous avez le droit de trouver cela pénible. Et ce,

D = 0 et E = 6
B = 0 et G = 6

9	0	0
0		6
0	6	3

8	0	1
0		6
1	6	2

7	0	2
0		6
2	6	1

6	0	3
0		6
3	6	0

Les quatre solutions obtenues pour deux combinaisons de cases centrales données, en faisant varier le nombre de la case dans le coin en haut à droite.

même si la symétrie vient parfois à notre secours… Par exemple, une fois étudié le cas « D = 0, E = 6, B = 2 et G = 4 », il est inutile d'étudier « D = 2, E = 4, B = 0 et G = 6 » : les solutions qu'il peut nous donner sont toutes des rotations de celles du premier cas. Soit tout de même quarante solutions à vingt-quatre poules.

	D=0 E=6	D=1 E=5	D=2 E=4	D=3 E=3
B=0 G=6	4			
B=1 G=5	4	5		
B=2 G=4	4	5	6	
B=3 G=3	2	3	3	4

Décompte des solutions obtenues pour chaque couple de combinaisons de valeurs pour les cases centrales.

© G. Reuiller, 2021

	18	19	20	21	22	23	24
	5	9	17	22	30	34	40
	25	26	27	28	29	30	31
	40	41	35	29	20	16	10
	32	33	34	35	36	365	
	8	4	3	1	1		

Décompte de toutes les configurations possibles pour chaque total admissible de poules.

© G. Reuiller, 2021

Pour finir de répondre à la question initiale, il aurait fallu faire le même genre de dénombrements pour les autres nombres totaux possibles de poules… Ni les participants, ni les organisateurs n'en ont eu le courage, mais une bonne âme a écrit un programme pour les trouver à notre place (remerciements à Sabrina Coudry !). Chaque jour d'une année non bissextile, les poules peuvent adopter une configuration correcte différente… Notez l'étonnante répartition des nombres de configurations : elle n'est absolument pas symétrique !

Il est passionnant de voir comment un problème à l'énoncé si simple et au contenu mathématique si élémentaire peut donner lieu à tant d'explorations, qui dépassent largement ce qu'il est possible de faire lors d'un atelier d'une heure. Surtout que la situation initiale peut être vue sous un autre angle. Il y a deux paramètres dans ce problème : le nombre total de poules dans le poulailler et le nombre de poules exigé par ligne ou par colonne. Nous avons considéré le deuxième comme constant, et fait varier le premier. Mais nous pourrions faire le contraire : avoir toujours le même nombre total de poules, et se demander quelles seraient les valeurs possibles pour ce second paramètre… À vous de jouer !

G. R.

Pour en savoir (un peu) plus

Récréations mathématiques. Jacques Ozanam, extraits commentés par André Deledicq, problème 10, ACL – Éditions du Kangourou, 2010.

Récréations mathématiques d'Ozanam. Pierre Crépel et Nicolas Pelay, *Images des mathématiques*, 2011, disponible en ligne.

Déguster les mathématiques à la façon Top Chef

Joëlle Lamon

Enseignante et chercheuse à la Haute École Francisco Ferrer de Bruxelles. Responsable du site «Jeux mathématiques à Bruxelles»

Intéresser des élèves et plus généralement des personnes de tous niveaux aux mathématiques est le défi de bien des enseignants. Nous avons concocté ici un menu imaginaire constitué de quelques ingrédients – outils rassemblés en trente-cinq ans de carrière, que vous compléterez par les vôtres, au fil de vos expériences et de vos rencontres, réelles et virtuelles. L'objectif est de faire avancer chacun, quels que soient son niveau et ses intérêts, en proposant des portes d'entrées diversifiées pour que chacun puisse profiter de celle qui lui convient le mieux.

Pour se mettre en appétit : le buffet apéritif collectif

Pour démarrer notre menu imaginaire, nous vous proposons un buffet ludique de jeux, d'énigmes et de défis. Il existe dans le commerce un grand choix de jeux qui permettent de développer ensemble des compétences mathématiques variées : vision compétitive dans le plan avec Blokus (Bernard Tavitian, 2000) ou collaborative dans l'espace avec La Boca (Asmodée, 2013), ou plus simplement le jeu Puissance 4 à trois dimensions, l'utilisation des tables de multiplication dans un jeu d'alignement comme Fou des Maths appelé aussi Mad math (Patrick Ouvrard, 1997), ou des grandeurs dans Otrio (Spin Master Games, 2018), autre jeu d'alignement, utilisation créative du calcul mental avec Mathador (Éric Trouillot, 2001), ou encore stratégie avec le jeu de Hex (Piet Hein et John Forbes Nash, 1942 ; CIJM, 2011). La brochure *Maths Jeux Culture Express* (CIJM, 2019, intégralement disponible en ligne) proposait un éventail documenté et très large de jeux de société permettant de développer, pour tous les publics, des aptitudes en logique et en mathématiques. Pour permettre à chacun de trouver des jeux à son niveau, on en vient naturellement à des défis plus personnalisés. On en trouve dans de nombreux jeux de la gamme IQ de l'éditeur belge Smart Games, comme Cube Puzzler GO (2018), où il faut résoudre des défis géométriques progressifs : gare à l'addiction ! L'éditeur américain Think Fun n'est pas en reste, avec des jeux comme Laser Maze, où l'on doit anticiper des effets de miroirs.

Un buffet bien garni
à la fête des maths de Villeneuve-d'Ascq (Nord).
©J.L. - CIJM

Un championnat de Hex à Paris.
©P.A. - CIJM

Enfin, des défis plus abstraits, comme ceux des Championnats des jeux mathématiques et logiques ou de l'association Kangourou, permettent de s'engager progressivement de façon plus rigoureuse, en dépassant les essais / erreurs par l'élaboration de raisonnements plus abstraits.
Comme pour n'importe quel buffet, le regard et le fait de pouvoir découvrir de nouvelles saveurs est essentiel ! Différentes pistes sont accessibles sur le site Jeux mathématiques à Bruxelles **(https://www.jeuxmath.be/fiches-des-jeux)**.

Plusieurs à table : le plaisir de la convivialité retrouvée

Il existe relativement peu de jeux collaboratifs en mathématique. Par contre, pour mener un projet de recherche, comme ceux proposés par l'association MATh.en.JEANS (acronyme de « Méthode d'apprentissage des théories mathématiques en jumelant des établissements pour une approche nouvelle des savoirs », **https://www.mathenjeans.fr**), ou des projets d'exposition sur un sujet mathématique, ou simplement la création ou la diffusion d'énigmes sous une forme originale, l'apport de chacun est bienvenu !

Dans le même esprit, depuis plusieurs années, le prix André - Parent, organisé par le CIJM, permet à des groupes d'élèves de montrer leurs recherches lors du salon « Culture et jeux mathématiques ».
Des rallyes collaboratifs, comme le Rallye mathématique transalpin ou le Rallye Mathématiques sans frontières, sont également l'occasion de faire travailler en équipe et de permettre à chacun de résoudre des défis à sa portée, avec l'aide des autres.

Pour toutes ces propositions, la recherche se fait dans une atmosphère conviviale, où la parole de chacun est accueillie avec bienveillance.

Sur le stand du Prix André-Parent.

©J.L. - CIJM

Pavages d'or et d'argent à Bruxelles.

©P.A. - CIJM

Et pour ceux qui préfèrent encore un menu virtuel ?

Avec le confinement, l'exploitation de logiciels attractifs a connu une véritable explosion, avec comme principal objectif d'inciter les élèves à s'engager dans des tâches mathématiques, dans un contexte de télétravail familial pas toujours facile. De nombreux enseignants ont développé des présentations interactives en utilisant l'application Genially que le CIJM utilise d'ailleurs pour les stands virtuels **(Genially Web SL, 2015, https://www.genial.ly/login)**. Chacun choisit son parcours, au moins en partie. C'est aussi grâce à cette application que se sont développés de nombreux jeux d'évasion (ou *escape games*).

Au-delà de la plateforme d'apprentissage ludique Kahoot (The Walt Disney Company, 2013, **https://kahoot.com**) et des formulaires classiques, le système de vote interactif Wooclap (Sébastien Lebbe et Jonathan Alzetta, 2015, **https://app.wooclap.com/auth/login**) permet de poser des questions de type varié en direct, que ce soit en présentiel ou à distance, en utilisant ordinateur, tablette ou smartphone. Gageons qu'il y a encore beaucoup à développer pour optimiser les moments de rencontre virtuels ou réels.

Pour jouer à plusieurs, des plateformes de jeux de société en ligne, comme Board Game Arena (Grégory Isabelli et Emmanuel Colin, 2010, **https://fr.boardgamearena.com**) ont permis à de petits clubs de maintenir des activités extrascolaires. Enfin, il est possible d'utiliser ou de proposer une boîte à outils comme par exemple le site **https://www.jeuxmath.be** qui offrait, lors du premier confinement, un projet « Réfléchir à distance ».

Si le numérique a pris une place très importante dans nos vies, au fil des mois les « vraies » rencontres sont apparues comme essentielles, tout comme les « vrais » cafés, les « vrais » restaurants et les « vrais » musées et lieux culturels.

Recettes mathématiques réussies : secrets d'hier et d'aujourd'hui

Le codage prend chaque jour une place plus importante dans nos sociétés et est devenu aussi essentiel que des recettes pour un cuisinier. Pour s'initier, il existe des jeux de niveaux très variés. Crazy Circus, aussi appelé Ma Ni Ki !, (Dominique Ehrhard, 2002), jeu où le dompteur doit donner des ordres à ses animaux, Athena (SNK Playmore, 2011), jeu où il faut qu'un explorateur puisse se déplacer dans un champ de fouilles bien encombré pour poser la statue sur son socle, Code Master (Think Fun, 2018), où cette fois un robot doit se déplacer avec des contraintes de déplacement, ou encore les applications Run Marco (Allcancode, Inc., 2014) et Euclidea (Horis International Limited, 2019) sont autant de jeux qui préparent à utiliser des langages de programmation comme Scratch (Mitchel Resnick, 2006) ou Python (Guido van Rossum, 1991).

L'impression 3D est une autre façon d'aborder la nécessité d'utiliser un langage et des instructions codifiées, dans un contexte de production particulièrement attractif, comme celui de la lecture et l'élaboration de recettes.

Pour les gourmets et les amateurs : les spécialités des chefs

Chaque maître queux a ses spécialités, comme chaque professeur a ses sujets fétiches. En fonction des circonstances, et souvent des affinités, de nombreux enseignants développent des projets interdisciplinaires, qui sont autant de traces de l'universalité des mathématiques : raisonnement logique, langage et vocabulaire mathématique, littérature, contes, théâtre, magie, films et séries, argumentation ou rhétorique et liens logiques, physique, chimie et expériences, biologie et semis, mouvements et orientation, histoire et mathématiciens, géographie et cartographie, économie et évolutions, musique et fractions ou symétries, arts et géométrie, architecture, informatique, sciences de l'ingénieur sont autant de domaines où l'on peut trouver des mathématiques.
La revue *Tangente*, par la diversité des thèmes qu'elle aborde, donne de nombreuses pistes pour (faire) développer ce type de projet. Des vidéos et livres comme *Le Grand Roman des maths* (Flammarion, 2016) de Mickaël Launay (alias Micmaths) sont autant d'autres pistes intéressantes.

Quel que soit le thème, sensibiliser les élèves à la présence de mathématiques, tantôt plus apparente, tantôt plus cachée, aide à montrer la diversité des sens que chacun peut donner aux mathématiques et leur utilité. C'est aussi l'occasion de pouvoir déguster les mathématiques « à sa sauce », en choisissant les approches auxquelles nos papilles mathématiques sont plus attirées.

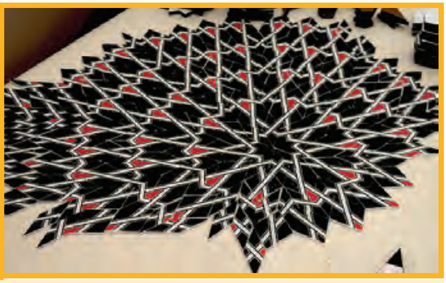
Un tour du monde des saveurs : entre terroir et exotisme

Les musées, voyages, conférences, expositions, festivals et évènements culturels sont autant d'occasions de découvrir de nouvelles saveurs mathématiques. Habituer les élèves à regarder une œuvre avec un œil mathématique est une autre façon de les intéresser, tout en les aidant à développer des compétences d'analyse essentielles.

Le développement de maisons des mathématiques et d'autres animations ponctuelles fournit aux enseignants de belles occasions de faire découvrir des facettes différentes des mathématiques. Il est impossible d'embrasser, ni même d'aborder, toute la culture mathématique, tant elle est riche et diverse. Exploiter les circonstances culturelles pour l'aborder avec un regard particulier, qui peut évoluer en fonction de l'âge, des connaissances et des intérêts des élèves permet de développer ce regard particulier qui est le nôtre. De même, le gourmet découvre la cuisine du monde à travers les menus de restaurants d'origines multiples, qui sont autant d'invitations au voyage gustatif pour tous.

Jeux traditionnels à Bruxelles.

©J.L. - CIJM



Sur le stand Zellije à Paris

©P.A. - CIJM

Analyser des recettes ou des plats

Au-delà de leur intérêt culturel, les mathématiques permettent aussi d'analyser et de modéliser des situations, comme le cuistot repérera dès la lecture les éléments essentiels d'une recette ou pourra retrouver, lors d'une dégustation à l'aveugle, les ingrédients d'un plat. Rester critique face aux informations et surtout aux graphiques et visuels tendancieux est essentiel dans la formation de chaque citoyen, tout comme la décoration d'un plat ne garantit pas qu'il sera bon. Le repérage et l'analyse d'erreurs est une autre façon d'accrocher l'attention et de développer l'intérêt pour les mathématiques.

Nous sommes de plus en plus inondés d'informations, dont la portée et le contenu doivent être analysés sous peine de se laisser tenter par des idées simples mais bien souvent trop réductrices : la réalité est complexe, et les mathématiques aident à en saisir différentes facettes de façon objective, à tous niveaux.

Élaborer de nouvelles recettes : développer sa patte personnelle

Comme le chef coq va inventer le menu du jour à partir des produits du marché, créer des défis, élaborer des constructions originales, profiter des découvertes des élèves pour aiguiser leurs « lunettes mathématiques » ne s'improvisent pas, mais se construisent par une connaissance de ce qui existe, en s'aidant de son propre raisonnement. C'est ainsi que le site **https://www.jeuxmath.be** a été conçu et s'est développé depuis plus de dix ans : tant qu'à se construire une boîte à outils, autant qu'elle serve à d'autres !

Ce n'est donc pas une recette qui s'élabore, mais un véritable restaurant : chaque thème enrichit le précédent à la manière d'un ingrédient que l'on ajouterait à un ensemble pour constituer un menu de plus en plus raffiné. Et si, plus qu'un apprentissage, les mathématiques, à tout âge, c'était d'abord observer et analyser, dégager des idées, se poser des questions et essayer d'y répondre ?

Bonne dégustation et belles recettes !

J. L.

Pavages sur le stand 2AMaJ à Paris.

© J.L. - CIJM

Frises et polyèdres à Bruxelles.

© P.A. - CIJM

Pour en savoir (un peu) plus

« Jeux mathématiques à Bruxelles » : ***https://www.jeuxmath.be***
Site sur lequel vous trouverez certainement une pépite : compétitions mathématiques, projets de recherche, utilisation des technologies en mathématiques…

Maths Jeux Culture Express. Comité international des jeux mathématiques, 2019, disponible en ligne.

Médiations déMATHérialisées : de nouvelles formes d'interactions avec le public

Robin Jamet

Médiateur au Palais de la découverte

Le confinement a été une période… compliquée, mais aussi une incitation à trouver de nouvelles idées afin de rester en contact avec le public. À diverses occasions, l'unité Mathématiques du Palais de la découverte a tiré parti de cette situation pour proposer des (nouveaux) formats numériques. Objectif : offrir des interactions différentes avec nos interlocuteurs, voire essayer de rencontrer un nouveau public qui ne viendrait pas naturellement dans notre musée. Il n'y a pas eu que des réussites, mais quelques vraies bonnes surprises se sont produites. Petit retour d'expérience.

Réinventer le lien avec le public

Nous avons été grandement aidés dans nos tentatives par le fait de ne pas être les seuls à vouloir développer des médiations de mathématiques en ligne. Nous avons en effet largement profité d'initiatives d'émissions vidéo en direct lancées par d'autres : « Le Myriogon », « Parlons math » et, bien sûr, le salon déMATHérialisé de la culture et des jeux mathématiques (à voir et revoir en ligne !).

Jamais une médiation à distance, quelle que soit sa forme, ne pourra remplacer une médiation « humaine », avec une présence physique de tous les participants et du médiateur dans un même lieu. Adapter nos médiations humaines à un format à distance est en soi un défi : nos « trucs » habituels (objets à montrer, interpellation directe du public…) ne fonctionnent plus, ou en tout cas plus de la même façon. Nous ne voyons pas le public, ce qui enlève les mouvements de sourcils ou autres grimaces qui trahissent l'incompréhension d'un interlocuteur. Sans ces repères, le médiateur risque beaucoup plus facilement d'être « dans sa bulle », et de moins s'adapter à son public, qu'il ne perçoit que très peu. Reste l'interaction avec le public *via* un *tchat*, qui entrave la fluidité de la médiation et empêche tout échange rapide avec l'interlocuteur, pourtant nécessaire pour être sûr d'avoir bien compris la question posée ou pour vérifier que le public continue à suivre ce que le médiateur raconte. Mais le clavardage a, par ailleurs, de véritables atouts. Ainsi, le public s'y exprime beaucoup plus librement : pas de problème de timidité (le plus souvent le *tchat* est anonyme), ou de risque de couper la parole à qui que ce soit. Des discussions avec le médiateur ou entre les participants eux-mêmes peuvent apparaître sans interrompre le cours de l'exposé, il est possible d'y donner des liens vers des sites, des images… Petit bémol tout de même : la gestion du *tchat* est un travail à part entière, que ne peut assurer seul le médiateur, accaparé par sa présentation.

Une solution nous est apparue judicieuse pour tenter de rétablir le lien, très précieux, entre le médiateur et le public, malgré le fait que nous ne puissions partager une expérience physique réelle : proposer, autant que possible, des expériences à faire en direct chacun chez soi. Pour les ateliers, dispositifs où nous proposons au public de chercher, d'expérimenter, nous demandions à chaque participant de se munir d'un matériel simple à trouver (jeu de cartes, papier, ciseaux, ruban adhésif…).

« Bricolages mathématiques » est un exemple d'atelier proposé en version numérique au salon déMATHérialisé 2020, basé sur la manipulation simultanée du médiateur et des participants.

© *Universcience*

Sans donner envie de poursuivre cette expérience dès que le contact direct avec le public sera à nouveau possible, cette redécouverte de l'importance, pour le public, de « faire lui-même », nous a déjà incités à envisager des adaptations d'exposés « classiques » où le public serait plus acteur. Une salle d'ateliers/exposés remplie de matériel simple de bricolage nous a, par exemple, semblé être une bonne piste, permettant d'explorer des mathématiques « avec les mains ».

Prolonger l'expérience de médiation avec la mise en ligne

Autre nouveauté : après le direct, les exposés restent en ligne. Et une parole qui reste n'est pas tout à fait la même… Non que nous disions beaucoup de bêtises habituellement, mais le fait de tenter, systématiquement, de nous adapter à notre public, que ce soit pour simplifier le plus possible, ou au contraire pour répondre à une question pointue, peut nous amener à utiliser parfois des formules « un peu limite », ou à répondre de manière très approximative. Point positif en revanche : il est potentiellement possible de toucher beaucoup plus de public, puisque la taille de la salle n'est pas limitée, l'exposé est gratuit, proposé à toute personne où qu'elle soit (avec une connexion Internet !), quand elle veut, avec éventuellement des pauses, des interruptions…

Si cette médiation n'a touché que cent soixante-dix internautes au moment de sa diffusion en direct le dimanche 14 mars 2021, elle a donné lieu à plus de trois mille six cents vues quelques jours après. Jamais un exposé en présentiel n'aurait eu une telle audience !

©*Universcience*

La rediffusion d'une médiation ne permet plus, évidemment, d'utiliser le *tchat*. Mais elle offre en revanche un autre canal de communication directe entre le médiateur et le public : la possibilité de laisser des commentaires. Cela permet à des spectateurs retardataires, ou à des internautes ayant suivi le direct à qui la nuit a porté conseil, de poser des questions au médiateur en personne, après avoir mûri leur réflexion sur les contenus présentés. Si cela demande une grande vigilance de la part du médiateur (qui doit régulièrement consulter d'éventuels nouveaux commentaires), cela crée une interaction nouvelle encore différente du clavardage en direct. Il y aurait un potentiel énorme à proposer à du public ayant suivi physiquement un exposé un système de commentaires écrits à partager *a posteriori*, voire pendant l'exposé avec le reste du public… et le médiateur, bien sûr !

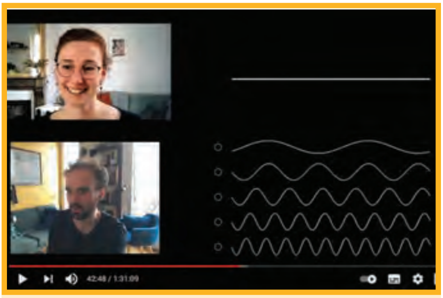
Récolter des avis du public, des idées, des expertises…

La possibilité de récupérer beaucoup de commentaires de la part du public nous a inspiré des formats très différents de nos exposés standards, notamment dans le cadre de notre réflexion sur le futur Palais de la découverte, qui devrait ouvrir en 2025. Après tout, se trouvent dans notre public potentiel bon nombre d'enseignants, de chercheurs, d'amateurs passionnés, qui connaissent bien plus de choses que nous sur bon nombre de sujets mathématiques. Et le public « candide » peut, si nous lui demandons, dire plus facilement ce qu'il pense de telle ou telle offre. Une belle occasion d'ouvrir nos coulisses ! L'un de nos projets pour 2025 consiste à créer un « cabinet de curiosités mathématiques » dans notre future salle d'exposés, c'est-à-dire y placer un maximum d'objets et de mini expériences qui intriguent, surprennent, montrent la diversité des mathématiques et donnent envie d'en savoir plus, par exemple en assistant à nos exposés. L'émission numéro 15 de la chaîne You Tube du Myriogon présentait cette idée et quelques objets déjà pressentis pour y figurer. Pour chacun d'eux, les internautes étaient encouragés à donner leur avis *via* le clavardage : aimeraient-ils voir cet objet ? jouer avec ? en savoir plus ? Est-ce que celui-ci leur évoque ou non les mathématiques ? Le public était invité à donner d'autres idées d'objets qui auraient leur place dans ce cabinet de curiosités. Les retours ont été nombreux et enrichissants, ce qui donne envie de poursuivre de telles émissions de réflexion avec nos publics, même sans crise sanitaire !

Dessin interactif proposé à l'occasion du Salon 2020. Chaque objet est cliquable et renvoie vers un article ou une vidéo le présentant.

© *Laure Cornu, 2020*

Autre exemple d'apport de contributions possible, à destination d'un public plus spécifique. Au Palais, nous ne présentions pas (ou si peu) d'analyse, un sujet à la fois difficile à vulgariser et impossible à négliger tant son rôle est essentiel en sciences ! Nous avons donc consacré l'émission numéro 29 à l'analyse de Fourier, au cours de laquelle nous avons plutôt demandé au public matheux de nous fournir sa définition de l'analyse, les résultats jugés essentiels, des idées fortes… qui seraient parlants pour présenter cette discipline. Il y avait eu beaucoup moins de retours, une partie importante du public n'ayant pas de connaissance particulière sur le sujet. Un format moins ouvert, moins vulgarisé, adressé plus clairement à des « spécialistes », avec un public moins nombreux mais mieux ciblé serait certainement à tester.



« Fourier et la musique », une émission avec Laure Cornu et Mickaël Launay pour enfin aborder l'analyse de façon accessible !

© *R.J., 2020*

Une autre émission (la numéro 11) demandait plutôt des conseils pratiques, voire techniques, pour la mise en œuvre d'expériences mathématiques grand format, festives et nécessitant beaucoup de participants, autrement appelées « maths mobs». Ces médiations n'étaient absolument pas des visioconférences entre experts mais, au contraire, se voulaient accessibles au plus grand nombre et riches en contenus. C'est par le jeu du clavardage et autres commentaires *a posteriori* qu'elles constituaient, en plus d'une réelle médiation, un appel à idées et expertises. Comme dans le cas précédent, ce type d'émissions serait bien évidemment à poursuivre, pour faire participer des publics bien ciblés à la réflexion sur le futur Palais, les prochaines expositions, l'évolution de l'image à donner de notre discipline…

Tester des nouveaux formats et créer du contenu «tous ensemble»

Dans nos ateliers, nous tentons de placer le public dans une démarche de recherche mathématique : observer, émettre des conjectures, trouver des idées de démonstrations… Or l'un des aspects essentiels de la recherche, en amont de toutes ces étapes, est de trouver des questions intéressantes à se poser pour explorer un domaine nouveau. Toujours dans le cadre du Myriogon, à quatre reprises, nous avons donc présenté aux internautes des situations propices à se poser des questions de nature mathématique en les analysant en direct. Les commentaires ont été nombreux, mais une difficulté a été particulièrement flagrante : l'hétérogénéité du public (la présence importante d'une communauté de «matheux», allant beaucoup plus vite et plus loin que les «simples curieux»). Cela donnerait plutôt envie d'intégrer cette offre à nos ateliers «réels» plutôt que de la renouveler fréquemment en ligne…

La dernière expérience en ligne pour l'unité Mathématiques a été une émission en direct, le 14 mars, à propos du nombre Pi. Rien de bien original, mais un appel à poster des contenus la semaine suivante, chaque jour sur un thème différent (mais toujours en lien avec Pi). Soyons honnêtes : le résultat a été extrêmement décevant et le nombre de contributions très bas. Les réseaux sociaux sont un média que nous ne maîtrisons pas encore, mais sans doute plein de potentialités, lui aussi !

Ce post est celui qui a eu le plus de succès. Un professeur de collège s'en est inspiré pour créer, avec ses élèves, une page entière de Pi-ctogrammes.

© *Universcience, 2020*

Autre expérience du même genre mais beaucoup plus réussie : le « mur des pavages », proposé à l'occasion du précédent Salon déMATHérialisé. L'idée était d'expliquer la classification mathématique des pavages du plan suivant leurs symétries, puis de demander au public de nous envoyer des photos de tapis, carrelages, papiers peints ou tout autre objet recouvert d'un motif périodique. L'internaute devait nous indiquer la famille de pavages à laquelle il appartenait, selon lui. Un échange de mails s'ensuivait, afin de nous mettre d'accord sur le résultat de l'algorithme de classification. Puis les photos étaient déposées sur un site, venant s'ajouter à une grande bibliothèque de pavages périodiques sortis de notre quotidien, construite avec les internautes. Ce site existe toujours, peut être utilisé en médiation, et alimenté à tout moment.

Expérience hybride mélangeant réseaux sociaux et site Web classique, le format « Dessine-moi les sciences » a été initié par une collègue médiatrice de l'unité de Chimie. Le principe ? Un appel à dessins est lancé sur les réseaux sociaux, sur un thème scientifique précis. Des médiateurs utilisent ensuite les dessins reçus pour construire une page Web sur le thème évoqué. Au-delà de la contrainte de partir d'un matériau fourni par les internautes, les dessins donnent lieu à des commentaires, des réflexions, des rectifications aboutissant à un contenu original, voire déroutant.

Toutes ces expériences de médiations mathématiques en ligne ne peuvent se résumer à un simple « palliatif » à l'impossibilité de recevoir des visiteurs dans nos espaces. Elles nous poussent à développer d'autres formes d'interaction avec le public. Elles nous obligent même parfois à revoir la manière dont nous pouvons faire des médiations « en présentiel ». Dans le contexte particulier de renouvellement de l'offre du Palais de la découverte en vue d'une réouverture en 2025, elles se sont révélées être un champ d'expérimentation dont nous ne pouvons nous passer. Si nous sommes très impatients de vous retrouver « en vrai » dans notre nouvel espace situé dans le XVe arrondissement de Paris (Les Étincelles – Palais de la découverte), nous ne sommes donc pas prêts pour autant à laisser tomber toute forme de médiation en ligne !

R. J.

Pour en savoir (un peu) plus

Le mur des pavages *: https://pavages.wordpress.com*

Le site Internet de la chaîne « Parlons Maths » : ***https://parlons-maths.fr***

« Le Myriogon. » Chaîne collaborative de maths jubilatoires et poétiques, **www.myriogon.com.**

Quand les mathématiques font l'histoire politique

Antoine Houlou – Garcia

Chargé de cours à l'université de Trente (Italie)

Dans le choix d'un régime politique, il y a bien sûr de nombreuses notions directement liées à la politique elle-même : justice, liberté, efficacité, équité… La plupart du temps, les philosophes politiques se sont penchés sur ces questions sans faire appel aux mathématiques, ce qui n'a d'ailleurs rien de surprenant pour le citoyen contemporain. Certains, néanmoins, ont tenté, avec plus ou moins de succès et de rigueur, de fonder leur pensée politique, ou du moins de l'étayer, par des raisonnements mathématiques. Parmi eux, citons Platon, qui est sans doute assez connu pour cet aspect, mais n'oublions pas Jean-Jacques Rousseau, qui l'est sans doute moins, et pourtant ses développements mathématiques dans le *Contrat social* (1762) révèlent une véritable préoccupation mathématique.

À gauche, sculpture figurant Platon (vers – 428, vers – 348), par Joseph Rayol (1688).
À droite, monument à Jean-Jacques Rousseau (1712 – 1778), réalisé par Albert Bartholomé en 1907.

©É. Thomas, 2017 (jardins du château de Versailles) *©É. Thomas, 2018 (Panthéon, Paris)*

Considérons, dans ce bref article, la politique comme un problème purement mathématique, en ce sens qu'elle se penche sur le nombre : puisque la politique commence lorsqu'au moins deux personnes sont présentes (la politique ne peut se faire tout seul), elle est nécessairement liée au nombre et à la conception que l'on s'en fait. Non pas du nombre en tant que « nombre de personnes présentes », mais en tant que nombre en soi, c'est-à-dire bien la conception que l'on se fait des mathématiques.

De l'harmonie mathématique à l'harmonie politique

Le premier exemple qui nous semble révélateur est celui de Pythagore. Sa conception du nombre est liée à la notion d'harmonie : en grec, l'univers est désigné par le terme cosmos, qui signifie aussi bien « univers » que « le bon ordre des choses », et même la parure, l'ornement. L'univers est donc intrinsèquement lié à la beauté, et donc à une forme d'harmonie car le désordre ne peut engendrer que la dissonance.

C'est précisément dans les sons dissonants et consonants que Pythagore (ou peut-être plutôt ses disciples) trouvèrent le lien entre les mathématiques et la musique : la *gamme pythagoricienne*. Le principe en est assez simple : si l'on prend une corde vibrante (un élastique par exemple) et qu'on la fait vibrer, elle émet un son. Par commodité, disons qu'il s'agit d'un do. Si on en fait vibrer la moitié, elle émet le même son à l'octave supérieure. Si on en fait vibrer les deux tiers, elle émet un son différent du premier, qui est en harmonie avec le son initial. Il s'agit de la quinte : on passe du *do* au *sol*. Dès lors, l'idée consiste à faire la quinte de la quinte (la quinte du *sol*, qui est le *ré*), puis la quinte de la quinte de la quinte (la quinte du *ré*, qui est le *la*) et ainsi de suite pour « créer » toutes les notes possibles à partir de notre son initial. Il se trouve qu'au bout de douze itérations, on retombe quasiment sur le *do*. Et l'approximation ici suffit à Pythagore pour établir une gamme de douze notes (qui fut utilisée jusqu'au XVIIIe siècle et l'arrivée de la *gamme tempérée*, qui corrige cette approximation).

Buste de Pythagore (vers –580, vers –495).

© Bertrand Hauchecorne, 2016 (Rome, Italie)

De la musique et des nombres, mais jusqu'à présent aucune politique à l'horizon. Pourtant, c'est bien de la théorie mathématico–musicale que la politique pythagoricienne émergea. La gamme pythagoricienne a cette propriété remarquable que toutes les notes sont en proportion de nombres entiers : grâce à la multiplication par deux tiers, on reste toujours avec des rapports d'entiers.

Cela fait dire à Pythagore que l'harmonie, non seulement musicale mais plus généralement l'harmonie du cosmos, se fonde sur des rapports de nombres entiers. Il doit donc en aller de même pour la politique.

Comment alors transformer l'harmonie musicale en harmonie politique ? Il suffit d'imaginer les individus comme des cordes de longueurs différentes, ces longueurs correspondant au mérite de chacun. Dans la société comme dans une harpe, il faut que chaque corde ait une place correspondant à sa longueur (respectivement, à son mérite), faute de quoi on risque la dissonance (respectivement, l'anarchie). En effet, si une personne de peu de vertu s'élève plus haut que les personnes vertueuses, le régime politique se corrompra nécessairement.

Telle est la pensée politique pythagoricienne : une sorte de méritocratie avant l'heure (le terme fut inventé par le politologue Michael Dunlop Young dans *The Rise of the Meritocracy* en 1958, un roman d'anticipation qui dénonce les côtés obscurs de la méritocratie). Pythagore met donc en place une oligarchie sous forme d'aristocratie intellectuelle à Crotone, ville d'Italie du Sud (la Grande Grèce) gouvernée par ses meilleurs disciples et dont il est l'éminence grise.

Médiété géométrique *versus* médiété arithmétique

Or, dans les années –510, alors que le gouvernement pythagoricien est en place dans la cité et devient influent dans la région, une ville distante d'à peine 100 km au nord, Sybaris, passe sous régime démocratique. La démocratie, qui est également en train de naître à Athènes, commence à se diffuser dans plusieurs cités du monde grec. Utilisant le prétexte que les disciples de Pythagore ont été chassés de Sybaris (parce qu'ils promeuvent une politique oligarchique), et craignant surtout que les idées démocratiques ne viennent troubler l'ordre politique de Crotone, Pythagore demande à son gouvernement d'entrer en guerre contre Sybaris. L'expédition, conduite par le célèbre athlète Milon de Crotone, est un succès ; Sybaris est rasée.

Cette guerre est certes politique, mais elle est également mathématique. Car la conception mathématique de la démocratie s'oppose frontalement à la conception mathématique de la méritocratie pythagoricienne. Pythagore fonde son harmonie et sa justice politique sur le concept de *médiété géométrique* : on doit obtenir proportionnellement à son mérite, ce qui met au centre de la politique la commensurabilité des mérites et donc leur rapport (au sens de fraction). À l'inverse, la démocratie se fonde sur la *médiété arithmétique* : tout le monde doit obtenir la même chose (égalité parfaite). La référence explicite aux médiétés géométrique et arithmétique est faite par les pythagoriciens, puis reprise notamment par Platon dans la *République* et Aristote dans sa *Politique*. Il ne s'agit pas d'une relecture mathématique postérieure de la politique grecque mais bien d'arguments centraux dès l'époque.

Aristote (–384, –322), tel que représenté en 1476 par Juste de Gand et Pedro Berruguete.

La médiété arithmétique se traduit ainsi dans la démocratie athénienne (on ne sait malheureusement pas grand-chose de la démocratie de Sybaris) à travers divers concepts et pratiques politiques. Puisque les citoyens sont égaux, il faut qu'ils aient une même possibilité de parole publique (*iségoria*), ce qui se traduit par le fait que si un citoyen prend trop d'espace politique, en intervenant trop souvent ou en prenant trop de poids politique (en devenant un leader), on peut le chasser de la cité (*ostracisme*) pour préserver l'égalité démocratico–arithmétique de la parole.

Une démocratie de l'équiprobabilité : le tirage au sort

Pour faire en sorte que tous les citoyens puissent participer activement au gouvernement, le tirage au sort est utilisé : tous les citoyens qui le souhaitent peuvent écrire leur nom sur une petite plaquette en bois, qui sera mélangée avec toutes les autres. Elles sont ensuite insérées par un préposé dans les encoches d'une stèle en pierre (le *klérotérion*). On introduit enfin dans un tube des cubes blancs et noirs (dont le nombre est une péréquation entre le nombre de candidats, le nombre de postes à pourvoir et le nombre de lignes et de colonnes du dispositif) que l'on fait sortir un à un : si, en premier, un cube blanc sort, on retient les citoyens de la première ligne ; si ensuite un cube noir sort, on exclut les citoyens de la deuxième ligne, et ainsi de suite jusqu'à avoir le nombre de citoyens nécessaire.

Cette « machine à tirer au sort » est centrale dans la démocratie athénienne où doit régner l'équiprobabilité d'être tour à tour gouvernant et gouverné.

Klérotérion
(machine à tirer au sort les citoyens retenus pour participer aux jurys populaires à Athènes).

© Marsyas, 2005
(musée de l'Agora antique d'Athènes)

Pour que même les Assemblées ne soient pas plus fortes que les individus, n'importe quel citoyen pouvait se présenter devant le tribunal politique (Héliée) pour déposer une action en illégalité (*graphê para nomon*) contre un autre citoyen qui avait proposé une loi ou un décret à l'Assemblée, même si cette proposition avait été adoptée à l'unanimité. Durant l'examen de la plainte, la loi en question était suspendue par précaution. Après un temps pour que chacune des parties puisse préparer son dossier, celui qui avait proposé la loi devait la défendre tandis que le plaignant devait l'attaquer. Ainsi, une loi qui s'avérait, après examen, contraire aux principes de la démocratie ou à une partie du peuple, se trouvait abrogée.

Quant au vote, il se faisait toujours à la majorité. Pourquoi la majorité ? Parce que, comme le note Aristote, *« la majorité a des prétentions qu'elle peut opposer à celles de la minorité ; car la majorité, prise dans son ensemble, est plus puissante, plus riche et meilleure que le petit nombre »* (*Politique*, III, 1283a). L'argument arithmétique est bien au centre de la procédure de vote à Athènes.

Aujourd'hui, l'égalité arithmétique existe toujours dans l'égalité des voix (ce qui ne fut pas toujours une évidence dans les démocraties modernes, où le vote pondéré fut défendu notamment par John Stuart Mill dans ses *Réflexions sur le gouvernement représentatif* en 1861). Pour autant, l'équiprobabilité a été abandonnée au profit du modèle représentatif, dans lequel on retrouve la notion de commensurabilité pythagoricienne : être élu nécessite de montrer qu'on est « meilleur » que les autres, qu'on a « plus de compétences que les simples citoyens ».

C'est ainsi que de nombreux politologues contemporains utilisent implicitement l'idée de la commensurabilité des citoyens pour distinguer ceux qui sont capables de gouverner, ceux qui ont suffisamment de lumières pour voter, et la masse des autres : l'économiste américain Bryan Caplan (né en 1971) ou encore le philosophe américain Jason Brennan (né en 1979), parmi les plus célèbres, proposent ainsi des arguments antidémocratiques fondés implicitement sur une approche mathématique de la démocratie.

Quant à l'incommensurabilité, elle a aussi ses conséquences en politique et est le signe de la disparition de la démocratie. Aristote en parle en ces termes : *« Si dans l'État un individu, ou même plusieurs individus, trop peu nombreux toutefois pour former entre eux seuls une cité entière, ont une telle supériorité de mérite que le mérite de tous les autres citoyens ne puisse entrer en balance, et que l'influence politique de cet individu unique, ou de ces individus, soit incomparablement plus forte, de tels hommes ne peuvent être compris dans la cité. Ce sera leur faire injure que de les réduire à l'égalité commune, quand leur mérite et leur importance politiques les mettent si complètement hors de comparaison ; de tels personnages sont, on peut dire, des dieux parmi les hommes »* (*Politique*, III, 1284a).

Les mathématiques firent ainsi l'histoire de la démocratie dès ses prémices, avec la tentative de Sybaris obstruée par la conception mathématico-politique de Pythagore, puis avec la naissance du modèle démocratique athénien. Aujourd'hui, elles permettent d'analyser le caractère plus ou moins démocratique de nos démocraties contemporaines et le risque, lorsque l'on attend que les urnes donnent le pouvoir à un homme (rarement à une femme) providentiel, que nous oubliions l'essence de la démocratie qui réside, peut-être avant tout, dans la médiété arithmétique.

A. H.–G.

Pour en savoir (un peu) plus

Égalité politique, égalité mathématique. Bernard Vitrac, 1987, disponible en ligne.

Principes du gouvernement représentatif. Bernard Manin, Flammarion, 1995.

Politique et société en Grèce ancienne. Le « modèle » athénien. Claude Mossé, Flammarion, 1999.

Polis. Une introduction à la cité grecque. Morgens Hansen, Les Belles Lettres, 2008.

Zodiac : les messages chiffrés d'un tueur en série

Hervé Lehning et Fayçal Ziraoui

Écrivain et journaliste scientifique

Polytechnicien et entrepreneur

Au tournant des années 1960 – 1970, un tueur en série qui se fait appeler Zodiac sévit en Californie. Son originalité est d'avoir communiqué avec la police à travers dix-sept lettres, dont quatre chiffrées. Le premier cryptogramme a été décrypté dès 1969, le deuxième vient de l'être, fin 2020. Ils résument relativement bien les méthodes classiques de cryptographie. Les deux derniers sont trop courts pour proposer des décryptements certains, mais des coïncidences troublantes militent pour la validité des décryptements qui sont proposés dans cet article.

Les quatre cryptogrammes du Zodiac sont désignés Z408, Z340, Z32 et Z13, en fonction de leurs longueurs. *A priori*, le plus long doit être le plus facile à décrypter… et ça a bien été le cas. Il a été envoyé en trois morceaux de huit lignes et dix-sept colonnes.

Premier tiers de Z408, le premier message chiffré.

Source : San Francisco Chronicle*, 31 juillet 1969*

La première idée qui vient à l'esprit d'un cryptologue est que le message a été chiffré au moyen d'une *substitution alphabétique*, chaque lettre ayant été remplacée par un ou plusieurs symboles. Plusieurs ici puisque le nombre de symboles utilisés excède largement 26. Ce type de substitutions, dites *homophoniques*, était encore courant à la Renaissance (Marie Stuart perdit la tête d'avoir eu confiance en un chiffre de cet acabit). Son seul avantage est de résister à la *méthode des fréquences*, qui permet au moins de trouver le symbole représentant « e », la lettre la plus fréquente en anglais comme en français. L'histoire nous enseigne la façon de décrypter un tel chiffre : la *méthode du mot probable*, inventée par Giambattista della Porta (vers 1535 ; 1615). Elle consiste à chercher des mots dont la présence est probable dans le texte. C'est ce que firent les décrypteurs de Z408, un enseignant et son épouse, Donald et Betty Harden. Leur idée fut de rentrer dans la psychologie d'un tueur en série qui, selon eux, a un égo surdéveloppé. Ainsi, le message devait commencer par la lettre « I » (« je », en anglais). Ensuite, ils ont cherché

« kill » et « killing » (verbe « tuer »). Le code s’écroula ainsi petit à petit, comme toujours avec ce type de chiffre. Voici le message décrypté :

I LIKE KILLING PEOPLE BECAUSE IT IS SO MUCH FUN IT IS MORE FUN THAN KILLING WILD GAME IN THE FORREST BECAUSE MAN IS THE MOST DANGEROUS ANAMAL OF ALL TO KILL SOMETHING GIVES ME THE MOST THRILLING EXPERENCE IT IS EVEN BETTER THAN GETTING YOUR ROCKS OFF WITH A GIRL THE BEST PART OF IT IS THAT WHEN I DIE I WILL BE REBORN IN PARADICE AND ALL THE I HAVE KILLED WILL BECOME MY SLAVES I WILL NOT GIVE YOU MY NAME BECAUSE YOU WILL TRY TO SLOI DOWN OR STOP MY COLLECTING OF SLAVES FOR MY AFTERLIFE EBEORIETEMETHHPITI

Les nombreuses fautes d’orthographe étaient vraisemblablement volontaires : un tel texte est en effet plus difficile à décrypter ! On peut traduire ainsi :

« J’aime tuer les gens parce que c’est du plaisir, plus que de tuer du gibier dans la forêt, parce que l’homme est l’animal le plus dangereux de tous à tuer. C’est excitant, même plus que d’avoir du bon temps avec une fille. Le mieux sera quand je mourrai. Je renaîtrai au paradis et tous ceux que j’ai tués deviendront mes esclaves. Je ne donnerai pas mon nom car vous essayeriez de ralentir ou de stopper ma récolte d’esclaves pour mon au-delà. Ebeorietemethhpiti. »

Malheureusement, malgré ce qu’il avait annoncé à la police dans une lettre non chiffrée, sa signature était incompréhensible. Il annonçait d’ailleurs lui-même pourquoi il ne donnait pas son nom. Une raison délirante dont on peut douter qu’il y croyait.

Ce décryptement rapide a pu vexer le Zodiac, qui a voulu montrer ses capacités en envoyant un message plus difficile à décrypter, le Z340. De fait, il fallut cinquante et un ans et trois personnes pour cela : David Oranchak, un développeur informatique américain, Sam Blake, un mathématicien australien, et Jarl van Eykcke, un passionné belge de cryptographie .

Z340, avec le logo du Zodiac en signature.

Source : San Francisco Chronicle, *8 novembre 1969*

Les symboles utilisés sont de même nature que ceux du Z408, donc une partie du chiffrement est probablement une substitution homophonique. Un autre chiffrement y avait été ajouté, sinon Z340 aurait été décrypté depuis longtemps. L’histoire de la cryptographie nous suggère qu’il s’agit d’une transposition, soit une anagramme du message… ce qui ne signifie pas qu’elle soit facile à trouver. Cela nous renvoie à la Première Guerre mondiale, au cours de laquelle les meilleurs chiffres conjuguaient substitution et transposition.

Comme l'équipe des décrypteurs disposait d'un excellent logiciel (AZdecrypt, créé en 2016 par Jarl van Eykcke) permettant de décrypter les chiffres de substitutions homophoniques tels que le Z408, il fut décidé de s'attaquer d'abord à la transposition qui, vu l'époque, avait dû être effectuée à la main et donc devait suivre une règle simple. Ils ont essayé six cent cinquante mille transpositions plus ou moins logiques ! L'échec était devenu une habitude quand soudain, après passage au crible de AZdecrypt, une transposition donna des passages clairs :

E HOPE YOU ARE … TRYING TO CATCH ME … THE GAS CHAMBER.

Ces deux derniers mots étaient particulièrement encourageants car correspondaient à une réalité vécue dans une émission de télévision d'octobre 1969, où un individu se faisant passer pour le Zodiac, intervenant par téléphone, affirmait avoir peur de la chambre à gaz.

La transposition essayée est naturelle pour un joueur d'échecs. Plus précisément, le trio a découvert (par chance selon lui) que, comme le Z408, le texte a été scindé en trois parties (deux fois 9 lignes puis 2 lignes) et la suite des lettres dans chaque partie décrit le déplacement d'un cavalier aux échecs (plus précisément, deux cases vers la droite et une vers le bas) en partant du haut à gauche. Quand le bord droit est atteint, le déplacement continue à la ligne suivante, à gauche (voir encadré).

Trois tableaux pour un message en trois parties

Le texte est constitué de trois cent quarante symboles. Numérotons-les de 0 à 339, ce qui donne une suite partant de 0 (la case en haut à gauche), puis 1 (obtenu de 0 par le déplacement du cavalier) et ainsi de suite, jusqu'à remplir toutes les cases. Le début de la suite est en rouge (de 0 à 10).

Premier tableau :

0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144
136	145	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127
119	128	137	146	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110
102	111	120	129	138	147	3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93
85	94	103	112	121	130	139	148	4	13	22	31	40	49	58	67	76
68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	5	14	23	32	41	50	59
51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	6	15	24	33	42
34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	7	16	25
17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	8

Deuxième tableau :

153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297
289	298	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280
272	281	290	299	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263
255	264	273	282	291	300	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237	246
238	247	256	265	274	283	292	301	157	166	175	184	193	202	211	220	229
221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	158	167	176	185	194	203	212
204	213	222	231	240	249	258	267	276	285	294	303	159	168	177	186	195
187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	160	169	178
170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	161

Troisième tableau :

306	332	324	316	308	334	326	318	310	336	328	320	312	338	330	322	314
323	315	307	333	325	317	309	335	327	319	311	337	329	321	313	339	331

En utilisant AZDecrypt et les éléments déjà établis, cette transposition mène au texte décrypté :

I HOPE YOU ARE HAVING LOTS OF FUN IN TRYING TO CATCH ME THAT WASNT ME ON THE TV SHOW WHICH BRINGS UP A POINT ABOUT ME I AM NOT AFRAID OF THE GAS CHAMBER BECAUSE IT WILL SEND ME TO PARADICE ALL THE SOONER BECAUSE I NOW HAVE ENOUGH SLAVES TO WORK FOR ME WHERE EVERYONE ELSE HAS NOTHING WHEN THEY REACH PARADICE SO THEY ARE AFRAID OF DEATH I AM NOT AFRAID BECAUSE I KNOW THAT MY NEW LIFE IS LIFE WILL BE AN EASY ONE IN PARADICE DEATH

Nous pouvons le traduire ainsi :

« J’espère que vous vous amusez bien en essayant de m’attraper. Ce n’était pas moi à la télévision, ce qui m’amène à dire quelque chose sur moi : je n’ai pas peur de la chambre à gaz car elle m’enverra plus tôt au paradis parce que j’ai maintenant assez d’esclaves pour travailler pour moi alors que tous les autres n’ont rien quand ils arrivent au paradis : c’est pour ça qu’ils ont peur de la mort. Je n’ai pas peur car je sais que ma nouvelle vie sera facile dans l’au-delà, au paradis. »

Dès lors que le code Z340 a été résolu, il a fourni une clé de substitution permettant d’associer les symboles utilisés par le Zodiac à des lettres de l’alphabet. Cela constituait un point d’entrée à la résolution par Fayçal Ziraoui des codes Z32 et Z13. En effet, ces cryptogrammes étant très courts, aucune méthode ne permettrait d’identifier une clé de substitution uniquement à partir de leurs symboles. Un grand nombre de clés permettraient en outre de donner des résultats crédibles, sans que la vérification de leur validité ne soit possible ! L’hypothèse de départ était donc que si les cryptogrammes Z32 et Z13 peuvent être résolus, alors ils utilisent la clé de substitution du Z340 (étant tous les trois l’œuvre du même auteur).

Le code Z32 était inclus dans une lettre dans laquelle le Zodiac menaçait de faire exploser une bombe au passage d'un bus scolaire. D'après lui, il renfermait la localisation de l'engin explosif. L'application de la clé de substitution du chiffre Z340 au Z32 permet de générer une séquence de lettres, sauf pour les symboles du Zodiac qui ne sont pas décodés :

YNSETAI(?)DOBP(?)AORT / RDFNOPTIYRGAIWN

Or le Zodiac a donné trois indices permettant de supposer que le Z32 renfermait des coordonnées, et donc des chiffres :

- Un cadran dessiné sur une carte accompagnant le Z32, positionné sur le Mont Diablo, qui fut longtemps un repère pour les géomètres du cadastre et par lequel est défini un méridien principal (Méridien Diablo) ;
- Une mention manuscrite à côté du cadran, « A régler sur le N. Mag. », que l'on peut interpréter comme « À régler sur le Nord magnétique » ;
- Un post-scriptum dans un courrier indiquant que l'indice du Mont Diablo faisait référence à des « radians et des inches », qui sont les noms des unités et des décimales de mesures d'angles.

Ces trois indices réunis permettent d'émettre l'hypothèse que le code Z32 renferme des coordonnées de latitude et de longitude (qui sont des mesures d'angles), par rapport au Nord magnétique (et non géographique, communément utilisé). On voit d'ailleurs des anagrammes de NORT, EAST, WEST. Une méthode triviale pour décrypter les lettres de l'alphabet obtenues précédemment en chiffres est de leur affecter leur position dans l'alphabet. Ou encore, de ne garder que les unités de leur position. Cette substitution élémentaire donne

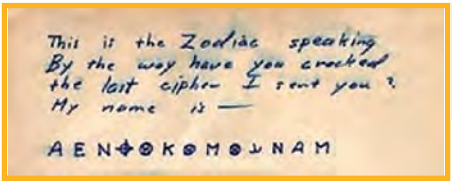
5495019(?)4522(?)1580 / 846456095871934

Une hypothèse pragmatique est que les coordonnées recherchées sont en Californie du Nord, zone où opère le tueur. On identifie donc une séquence de dix chiffres, parfaitement ordonnée, qui sont les coordonnées d'un lieu à proximité de South Lake Tahoe, à la frontière avec le Nevada :

YNSETAI(?)DOBP(?)AORT / RDF4560958719WN

soit 45.609 NORT(h) 58.719 WEST. Ce résultat est intéressant car on atterrit à 800 m d'une école, dans une ville qui est liée à l'affaire du Zodiac (il avait envoyé une carte postale faisant référence au lac Tahoe).
L'étape suivante est une analyse exhaustive de toutes les anagrammes possibles avec les lettres restantes. La recherche d'anagrammes n'ayant donné aucun résultat en première approche, l'hypothèse que le Zodiac a volontairement fait une erreur sur le symbole triangle (il échange le triangle plein et le triangle avec un point en son centre, ce qu'il a fait quatre fois sur huit dans le code Z408) a permis ensuite de reconstituer une seule séquence ayant une signification : LABOR DAY FIND 45.609 NORT(h) 58.719 WEST. Ce décryptage du Z32

est intéressant car le Labor Day marque la rentrée scolaire aux États-Unis, ce qui encore une fois est cohérent avec la menace du Zodiac de s’attaquer aux écoliers. Pour être totalement valide, l’hypothèse principale qui a permis de résoudre le cryptogramme Z32 doit permettre de résoudre aussi le code Z13. Dans le courrier reçu, Z13 était précédé de la mention « Mon nom est », le Zodiac laissant penser qu’il renfermait son identité.



Le cryptogramme Z13, précédé de « My name is » (« Mon nom est »).

Source : San Francisco Chronicle, *20 avril 1970*

En appliquant la même clé de substitution que le Z340, ainsi que la traduction de lettres en chiffres utilisée dans le code Z32, on obtient le résultat : 4851(?)1(?)5(?)(?)545. Les symboles du Zodiac, non décryptés par la clé Z340, peuvent être traduits également en chiffres de façon triviale en utilisant leur position dans le cadran du Zodiaque : le Cancer prend la valeur 4 et le Bélier 1. Ainsi déchiffré, le Z13 devient : 4851414541545 Cette séquence peu variée rappelle une technique de chiffrement inventée par le Français Félix-Marie Delastelle (1840 – 1902), qui utilise trois chiffres pour chiffrer tout l’alphabet (ici 1, 4 et 5) ; une analogie serait l’encodage binaire en électronique. En conséquence, les cryptogrammes utilisant cette technique ont une longueur qui est un multiple de 3. Or ici, la longueur est de treize caractères, qui n’est pas un multiple de 3, et malgré les répétitions de 1, 4 et 5, le caractère 8 semble de trop. En revanche, en considérant l’écart en valeur absolue entre les chiffres, on retrouve une séquence de douze caractères parfaitement déchiffrable par la méthode de Delastelle : 434.333.113.411. La méthode permet d’envisager six résultats possibles : UAMW, XNBS, DNZI, G_OE, Q_CJ, KAYR. Ce dernier est intéressant, car il fait penser à Lawrence Kaye, l’un des principaux suspects. Connu pour utiliser régulièrement le pseudo Lawrence Kane, il utilise également Larry KAY. Il se trouve que ce suspect habitait au lac Tahoe, à 6 km de l’école visée par le code Z32 ! Il fut également soupçonné d’avoir enlevé et assassiné une infirmière de South Lake Tahoe, Donna Lass.
La présence du « R » n’est pas surprenante : comme dans le code Z32, le Zodiac a pu vouloir tromper les autorités en glissant une erreur volontairement, et se protéger dans l’éventualité où son cryptogramme serait déchiffré.

Pour résoudre les codes Z32 et Z13, une approche purement cryptographique ne suffit pas du fait de leur faible longueur. Il faut émettre des hypothèses qui sont plausibles du point de vue de l’enquête criminelle. Saurons-nous un jour la vérité sur l’identité du Zodiac ?

H.L. & F.Z.

Croquons la pomme des maths

André Deledicq
Président d'honneur de l'association
Kangourou sans frontières

Existe-t-il une meilleure manière de croquer les mathématiques que dans une pomme ? Inutile d'aller chercher ailleurs en effet : à lui seul, ce fruit délicieux nous permet de revisiter un pan historique et capital de l'histoire des mathématiques.

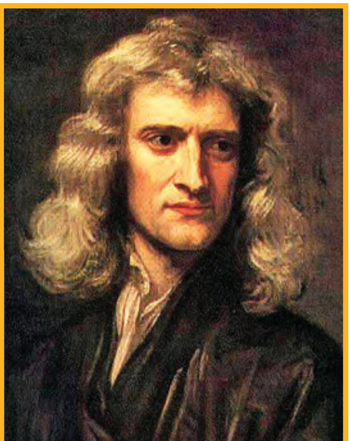
Le premier croquement de pomme du monde ne fut pas essentiellement mathématique, sauf à illustrer une égalité issue de l'amour primordial : $1+1=3$.

Croquons plutôt dans la plus célèbre des pommes mathématiques, celle de Newton ! La légende veut que, pendant l'été 1666, Isaac Newton (1643 – 1727) vivait chez ses parents au manoir de Woolsthorpe-by-Colsterworth, un hameau du comté du Lincolnshire en Angleterre. Allongé dans l'herbe sous un pommier devenu fameux, le savant britannique rêvassait en regardant la Lune, ronde et comme suspendue dans le ciel. Il l'imaginait se déplaçant lentement, fidèle à son orbite.

Un jour, cependant, la chose l'intrigua : pourquoi restait-elle là, apparemment immobile ?

Car si la Lune tournait autour de la Terre, et si aucune force connue ne s'exerçait sur elle, elle aurait dû s'enfuir en prenant la tangente !

Premiers écrits de Newton,
réunis en un ouvrage.



Portrait d'Isaac Newton.
Copie d'une peinture
de Sir Godfrey Kneller (1689).

Il y avait donc une force qui s'exerçait sur elle. Mais quelle sorte de force ? Et d'où cette force tirait-elle son origine ?

Une petite pomme pour l'homme, un grand pas pour la science

Au-dessus de lui, Newton vit alors une pomme trembler sur sa branche, se détacher et tomber à quelques pouces de son visage. Toujours selon la légende, il sursauta, s'appuya sur les coudes, regarda la pomme rouge sur l'herbe verte et s'écria : «*Eureka !*» Il eut en effet la sensation d'avoir trouvé ce qu'il cherchait depuis quelque temps : si la pomme était tombée, c'est qu'une force l'avait attirée vers le sol.

La maison natale d'Isaac Newton à Woolsthorpe-by-Colsterworth.

© *Xander89, 2007*

Le dicton dit : « Une pomme chaque jour éloigne le médecin pour toujours » (à condition de bien viser ?).

© *Jeremy007, 2010*

Pour la Lune, c'était pareil : elle aurait suivi la tangente à son orbite si elle n'était pas, en même temps, tombée vers le sol, attirée qu'elle était par la Terre comme l'était la pomme ou comme le serait tout autre objet pesant. Comme il l'écrira, un peu plus tard dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, livre troisième, proposition 4 du livre 3 : «*La Lune gravite vers la Terre et, par la force de cette gravité, elle est continuellement retirée du mouvement rectiligne et retenue dans son orbite. La force qui retient la Lune dans son orbite tend vers la Terre et cette force est en raison inverse du carré de la distance des lieux de la Lune au centre de la Terre.*»

La Lune est effectivement attirée par la Terre.

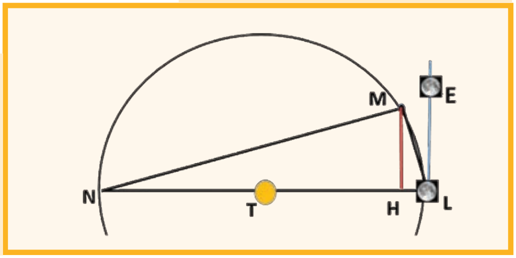
Refaisons ensemble les calculs de Sir Isaac Newton

Suivons maintenant le raisonnement d'Isaac Newton, inspirés par la remarquable traduction proposée par Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, dite Émilie du Châtelet (1706–1749). Femme de lettres, mathématicienne et physicienne française, elle est un personage majeur du siècle des Lumières.

Portrait d'Émilie du Châtelet par Maurice-Quentin de La Tour.

©RockMagnetist, 2013 (Choisel, Yvelines, collection particulière)

Supposons que, à un certain moment, la Lune ait été située en L, à environ 384 000 km de la Terre. Si la Lune n'était pas attirée par la Terre, elle aurait suivi la trajectoire [LE), tangente à sa trajectoire précédente.



La Lune attirée par la Terre et la Terre attirée par la Lune.

©A.D., 2021

Mais précisément, la Lune est attirée vers la Terre et elle « tombe » vraiment sur elle, depuis le point E (où elle aurait été dans son mouvement rectiligne), jusqu'au point M, où elle semble retenue dans son orbite quasi circulaire.

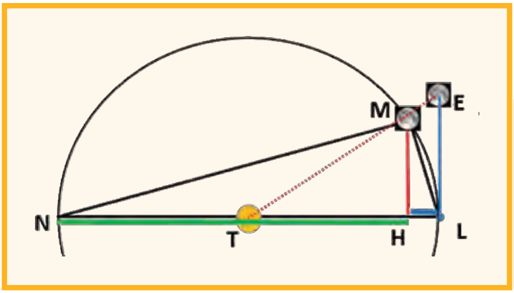


Schéma de la situation
prenant en compte l'attraction terrestre.

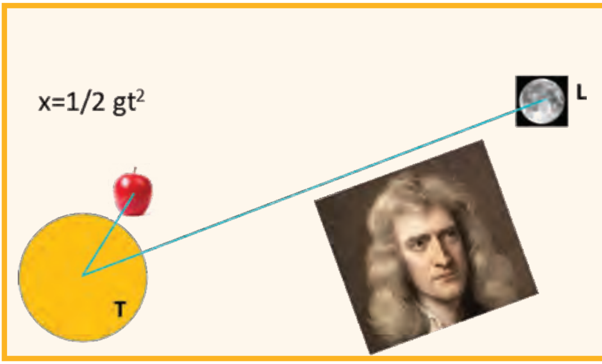
© *A.D., 2021*

Faisons le point. La Lune tourne autour du centre de la Terre, approximativement sur un cercle de 384 000 km de rayon. Et elle met 29,5 jours pour parcourir son orbite. La vitesse de la Lune est donc de $2\pi \times 384\ 000/(29{,}5 \times 86\ 400)$ kilomètres par seconde, soit environ 0,95 km/s. Pour nous, qui sommes passés par la Révolution française et son système décimal, cela représente, à très peu de choses près, un kilomètre par seconde. C'est facile à retenir ; souvenez-vous-en, le soir à la brune, la Lune se déplace par-dessus le toit, de 1 km/s.

Pour bien comprendre la suite du raisonnement de Newton, il convient de saisir les sous-entendus de la figure précédente : entre L et M, la Lune a parcouru 1 km. Ce n'est presque rien devant le rayon de son orbite, qui est presque un demi-million de fois plus grand. De sorte que l'angle $\widehat{LTM}$ est, dans la réalité, tout à fait minuscule, et que ce kilomètre, longueur de l'arc $\overset{\frown}{LM}$, est aussi la longueur du segment [LM], mais aussi du segment [HM], ou même du segment [LE]. De plus, la figure étant extrêmement « écrasée » sur le diamètre [NL], les segments [HL] et [ME] sont en réalité quasi confondus !

Newton s'enhardit : vers la loi de la gravitation universelle

Muni de ces remarques, nous pouvons alors, comme Newton, évaluer la hauteur de la chute de la Lune en une seconde : c'est la distance EM. Mais c'est aussi la distance HL, que Newton calcule grâce à une relation métrique dans le triangle rectangle LMN. La hauteur est en effet moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse. on a donc $MH^2 = NH \times HL$. La hauteur de la chute vaut ainsi MH^2/NH, ce qui représente, en kilomètres, $1/(2 \times 384\,000)$, soit, en millimètres, $1/0{,}768$, ou encore 1,3 mm.



À 384 000 km, la chute en une seconde est de 1,3 mm. À 6 400 km, la chute en une seconde est de 4 900 mm.

© Yeenosaurus, 2018 / A.D., 2021

La Lune chute vers le centre de la Terre, de 1,3 mm en une seconde ! Et cela se passe à 384 000 km de ce centre.

Mais Newton savait, depuis Galilée et comme nous, que, quelle que soit sa masse, un objet chute vers le centre de la Terre de 4,9 m en une seconde. Et cela se déroule à 6 400 km de ce centre.

Or, comment passe-t-on de 6 400 à 384 000 ? En multipliant par 60. Et comment passe-t-on de 1,3 à 4 900 ? En multipliant par 3 760, qui n'est « pas très loin » de 3 600, soit 60×60. Autrement dit, à peu de choses près : si l'on se trouve k fois plus loin (du centre) de la Terre, sa force d'attraction est k^2 fois plus petite.

Et Newton s'enhardit à énoncer une loi générale et universelle :

L'attraction entre deux corps est inversement proportionnelle au carré de leur distance.

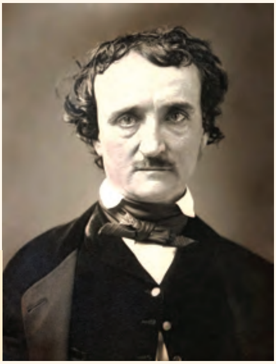
A. D.

Monument allégorique à Sir Isaac Newton
par Giambattista Pittoni, 1729
(détail).

© É. Thomas, 2018
(Grand Palais, Paris)

L'hommage d'un géant de la littérature

Au XIX^e^ siècle, le conteur-poète romantique Edgar Allan Poe (1809 – 1849) a magnifiquement évoqué la loi de Newton dans un texte peu connu mais d'un lyrisme flamboyant, bien rendu par la traduction de Baudelaire.



Edgar Poe vers 1848
(photographe inconnu, daguerréotype de W.S. Hartshorn).

Ce poème en prose de 1848 a pour titre *Eureka* ; en voici un court extrait :

« Permettez-moi de répéter et de préciser ce qu'affirme la loi de la gravitation : chaque atome, dans chaque corps, attire chaque autre atome, appartenant au même corps ou appartenant à un autre corps, avec une force qui varie en raison des carrés des distances entre l'atome attirant et l'atome attiré !

Que le lecteur s'arrête un moment avec moi pour contempler la miraculeuse, ineffable et absolument inimaginable complexité des rapports impliquée dans ce fait que chaque atome attire chaque autre atome... Eussions-nous simplement découvert que chaque atome tendait vers un point favori, vers quelque atome particulièrement attractif, nous serions encore tombés sur une découverte qui, en elle-même, aurait suffi pour accabler notre esprit ; mais quelle est cette vérité que nous sommes actuellement appelés à comprendre ? C'est que chaque atome attire chaque autre atome, sympathise avec ses plus délicats mouvements, avec chaque atome et avec tous, toujours, incessamment, suivant une loi déterminée dont la complexité, même considérée seulement en elle-même, dépasse absolument les forces de l'imagination humaine.

Si je me propose de mesurer l'influence d'un seul atome, je ne puis pas accomplir mon dessein sans d'abord compter et peser tous les atomes de l'Univers et considérer la position précise de chacun à un moment particulier de la durée.

Si je m'avise de déplacer, ne fut-ce que de la trillionième partie d'un pouce, le grain microscopique de poussière posé maintenant sur le bout de mon doigt, quel est le caractère de l'action que j'ai eu la hardiesse de commettre ?

J'ai accompli un acte qui ébranle la Lune dans sa marche, qui contraint le Soleil à n'être plus le Soleil, et qui altère pour toujours la destinée des innombrables myriades d'étoiles qui roulent et flamboient devant la majesté de leur Créateur. »

Les défis mathématiques des équations d'Einstein

Olivier Graf

Chercheur à Mathematics Münster
(Westfälische Wilhelms-Universität)

En 1915, Albert Einstein (1879 – 1955) propose une nouvelle théorie de la gravitation, qu'il appelle *théorie de la relativité générale*. Si cette nouvelle théorie de la gravitation gouvernée par des équations aujourd'hui appelées *équations d'Einstein* a permis dès 1915 de prédire des phénomènes physiques nouveaux ou jusque-là inexpliqués, ses implications profondes restent largement incomprises et sont, aujourd'hui encore, des sujets de recherche majeurs à la fois pour les physiciennes et les physiciens, pour les mathématiciennes et les mathématiciens.

La relativité générale d'Einstein : une théorie très mathématique

La gravitation est l'une des quatre interactions fondamentales de la physique. C'est elle qui est responsable de l'attraction des corps massifs : c'est à cause d'elle que nous sommes attirés par la Terre ou que la Terre tourne autour du Soleil. Avant Einstein, cette interaction était modélisée par la théorie de Newton. Dans cette dernière, une masse ponctuelle m génère un *champ de gravitation* – c'est-à-dire une donnée d'un vecteur en chaque point de l'espace– défini par $\vec{g} = -\frac{\mathrm{G}m}{r^3}\vec{r}$, où G est une constante universelle appelée *constante gravitationnelle* et où $\vec{r}$ désigne le vecteur entre la masse ponctuelle et le point de l'espace où l'on se trouve. Dans ce champ de gravitation, un corps massif ressent une force et doit accélérer en suivant la loi de Newton : $\vec{a} = \vec{g}$, où $\vec{a}$ est le *vecteur d'accélération*.

Dans sa théorie de la relativité générale, Einstein apporte une nouvelle description de l'interaction gravitationnelle, qui remplace celle de Newton. Il n'utilise plus un champ de vecteurs pour décrire le champ de gravitation généré par une distribution de matière, mais un champ de *tenseurs métriques*, qu'il note $g_{\mu\nu}$ (ou simplement g).

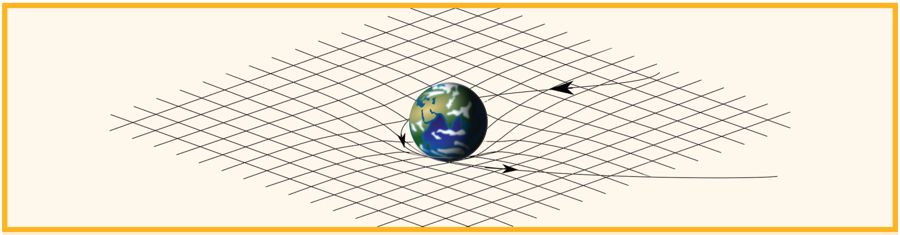
Ces champs de tenseurs métriques sont une manière de mesurer les distances et les angles en tout point de notre espace-temps. Einstein remplace alors la loi de Newton pour l'accélération des corps par une loi géométrique : un corps dans un champ de gravitation devra se déplacer le long des courbes de plus court chemin, lequel est mesuré grâce au champ de tenseurs métriques. Ces courbes sont appelées *géodésiques de l'espace-temps*.

Avant Einstein, les champs de tenseurs métriques avaient été introduits par des mathématiciens dans un contexte à première vue bien différent : ils permettaient de décrire la géométrie de surfaces comme la sphère, le cylindre, le tore… Les géodésiques correspondent dans ce cas aux courbes de plus court chemin dessinées sur ces surfaces, comme les grands arcs de la sphère par exemple. Utilisés sur des espaces-temps plutôt que sur des surfaces, ces objets donnent à la théorie de la gravitation d'Einstein un caractère très géométrique et très mathématique !

Comment calculer le champ de tenseurs métriques généré par un objet massif? Pour répondre à cette question, la théorie de la relativité générale contient des équations appelées *équations d'Einstein* :

$$\mathrm{G}_{\alpha\beta} = \frac{8\pi \mathrm{G}}{c^4}\mathrm{T}_{\alpha\beta}.$$

Dans ces équations, $\mathrm{G}_{\alpha\beta}$ –appelé le *tenseur d'Einstein*– est composé de dérivées du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, G est la constante gravitationnelle, c est la vitesse de la lumière dans le vide et $\mathrm{T}_{\alpha\beta}$ décrit mathématiquement la distribution de matière. Par exemple, dans un endroit de l'espace où il n'y a pas de matière, on a $\mathrm{T}_{\alpha\beta}=0$. Cependant, cela ne veut pas dire que le champ gravitationnel y est nul : la présence de matière à un endroit peut créer un champ gravitationnel à un autre endroit de l'espace, même si en ce point il n'y a pas de matière.



La quantité $\mathrm{G}_{\alpha\beta}$ a une signification géométrique qui vient de l'étude des surfaces : elle quantifie à quel point l'espace est courbé. On peut donc dire que la matière –mathématiquement décrite par $\mathrm{T}_{\alpha\beta}$ – « courbe » l'espace-temps, ce qui est souvent représenté dans les vues d'artistes par une masse qui déforme une nappe. Là encore, on voit qu'il y a des liens profonds entre la théorie d'Einstein, la géométrie et les mathématiques !

Une équation parmi les plus complexes de toute la physique !

Les équations d'Einstein sont des *équations aux dérivées partielles*, comme de nombreuses autres équations de la physique (de la mécanique des fluides, de l'électro-magnétisme…). Leur apparence « compacte » n'est qu'un leurre ! L'expression exacte de $G_{\alpha\beta}$ en fonction de $g_{\mu\nu}$ et l'expression exacte de $T_{\alpha\beta}$ sont extrêmement compliquées, et en font l'une des équations les plus sophistiquées de la physique. On ne connaît que très peu de solutions explicites, c'est-à-dire des solutions que l'on peut écrire avec des fonctions mathématiques usuelles : des puissances, des fractions, des cosinus et des sinus… (voir plus loin). L'immense majorité des solutions ne possède pas une telle expression et on étudie leurs propriétés d'une manière détournée, sans connaître leur écriture exacte : grâce à des approximations, à des estimations…

L'une des principales différences entre la théorie de Newton et la théorie d'Einstein concerne la nature des équations. En effet, les équations de la théorie de Newton sont des équations appelées *elliptiques*, où la variable de temps n'intervient pas, alors que les équations d'Einstein sont des *équations d'onde*.

La mathématicienne
Yvonne Choquet-Bruhat
a démontré un théorème fondamental
sur les équations d'Einstein.

© *George Bergman, 1974*

Mathématiquement, ceci a des implications très fortes sur la nature des solutions : dans la théorie d'Einstein, les solutions *évoluent dans le temps à partir d'une configuration initiale*. On peut en effet montrer que l'on peut se donner une configuration initiale (presque) quelconque pour les champs de matière et de gravitation et qu'il existe une solution des équations d'Einstein qui coïncide au temps initial avec cette configuration. Ce résultat mathématique majeur a été obtenu en 1952 par la mathématicienne française Yvonne Choquet-Bruhat.

L'une des conséquences de la nature ondulatoire des équations d'Einstein est l'existence de solutions se propageant dans l'espace, appelées *ondes gravitationnelles* et observées pour la première fois en 2015 par les détecteurs de LIGO et Virgo, soit près de cent ans après leur calcul par Einstein. Cette observation a valu le prix Nobel de physique à ses principaux contributeurs en 2017.

Des solutions particulières des équations d'Einstein : les trous noirs de Schwarzschild et de Kerr

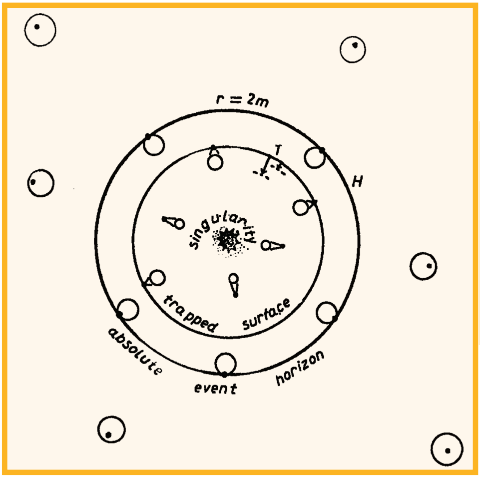
L'exemple le plus simple de solution explicite pour les équations d'Einstein est la *solution de Minkowski*, qui décrit un espace-temps sans gravitation et où le champ de tenseurs métriques g est défini par $g=-c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$.

Dès 1916, le physicien allemand Karl Schwarzschild trouve d'autres solutions explicites aux équations d'Einstein, qui décrivent le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle m ou d'une distribution de matière à symétrie sphérique. Ces solutions s'écrivent en utilisant des coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$g=-\left(1-\frac{2Gm}{rc^2}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2.$$

Les équations d'Einstein sont si élaborées qu'il a fallu ensuite attendre 1963 (soit quarante-sept ans !) pour qu'une classe de solutions explicites plus générale que les solutions de Schwarzschild soit trouvée par le physicien néo-zélandais Roy Kerr.

Les solutions de Schwarzschild et de Kerr possèdent toutes deux la particularité d'avoir en leur centre une région où l'on peut entrer, mais dont on ne peut pas ressortir. Ces régions – définies comme les régions qui ne peuvent pas être observées par un observateur très lointain – sont appelées *trous noirs* et sont l'une des prédictions les plus fascinantes des équations d'Einstein.



Vue spatiale du trou noir de Schwarzschild, dessinée par Roger Penrose.
Le trou noir correspond à la région $r \leq 2m$.

Les trous noirs de Schwarzschild et de Kerr sont-ils stables ?

Les solutions exactes d'équations de la physique, prédites par le calcul, peuvent n'être jamais observées dans la réalité. Par exemple, il est théoriquement possible de faire tenir un crayon droit sur sa pointe, mais dans la pratique le crayon finira toujours par tomber sur la table. Ceci est lié à la notion de *stabilité mathématique* d'une solution. On dit qu'une solution d'une équation est *stable* si l'évolution en temps d'une configuration initiale « proche » de la configuration initiale de la solution ne s'éloigne « pas trop » de celle-ci. Par l'intuition physique, on se doute que la solution « le crayon reste droit sur sa pointe » doit être mathématiquement instable, alors que la solution « le crayon est posé sur la table » doit être stable, et ceci peut être facilement vérifié mathématiquement.
De la même manière, les solutions exactes de Schwarzschild et de Kerr qui possèdent des régions « avec trous noirs » ne seront susceptibles d'avoir une réalité physique que si ce sont des solutions stables des équations d'Einstein. Les solutions de Schwarzschild et de Kerr sont-elles stables ? Leurs trous noirs existent-ils dans le monde réel ?
Contrairement au cas du crayon, on ne peut pas avoir recours à l'intuition physique pour deviner la réponse car il est très difficile d'observer un trou noir ! Ces questions sont encore aujourd'hui des questions ouvertes, auxquelles travaillent les mathématiciennes et les mathématiciens. L'avancée la plus récente a été obtenue en 2020 – sous des hypothèses additionnelles de symétrie – par la preuve de la stabilité de la solution de Schwarzschild, obtenue par les mathématiciens Sergiu Klainerman et Jérémie Szeftel.

Les trous noirs de Schwarzschild et de Kerr sont-ils uniques ?

Les solutions de Schwarzschild et de Kerr sont des solutions *stationnaires* des équations d'Einstein, c'est-à-dire qu'elles n'évoluent pas dans le temps. Cela ne veut pas dire qu'elles sont *statiques* – qu'il n'y a pas de mouvement –, mais que le mouvement ne change pas au cours du temps. Par exemple, les trous noirs de Kerr tournent sur eux-mêmes, mais avec un axe et une vitesse qui ne changent jamais !

Pour une équation d'évolution, les solutions stationnaires sont très importantes car on s'attend à ce qu'une solution quelconque de l'équation « se rapproche » d'une solution stationnaire quand le temps devient très grand. Existe-t-il d'autres solutions stationnaires que les solutions de Schwarzschild et de Kerr ?

Cette question de l'unicité des solutions de Schwarzschild et de Kerr comme solutions stationnaires des équations d'Einstein est l'une des questions majeures et encore ouvertes de la relativité générale, à laquelle travaillent les mathématiciennes et les mathématiciens.

Cachez cette singularité que je ne saurais voir !

Il existe des solutions des équations d'Einstein qui forment des singularités en temps fini, par exemple des solutions qui décrivent de la matière qui s'effondre sur elle-même sous l'effet de sa propre gravitation. En ces singularités, le champ gravitationnel peut devenir intense et les forces de marée – la différence entre la force gravitationnelle en deux points « proches » – faire se disloquer n'importe quel objet !
Un observateur qui irait vers une singularité aurait un temps de vie fini. Qu'en est-il des autres observateurs, même très loin de la singularité ? Une singularité pourrait-elle mettre fin à notre espace-temps ? En 1969, le prestigieux parrain de cette brochure, le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose, a conjecturé que ceci ne pouvait pas être le cas : les singularités se formant dans des contextes d'effondrement gravitationnel n'auraient pas d'influence sur un observateur lointain. Il a appelé sa conjecture la *conjecture de censure cosmique faible* – il y a une *conjecture forte*, qui ne sera pas développée ici –. « Censure » car les singularités doivent être « cachées » à un observateur lointain, c'est-à-dire être dans un trou noir !

Aujourd'hui encore, cette conjecture est le sujet d'intenses travaux de la part des chercheuses et des chercheurs. Dans les années 1990, le mathématicien grec Demetrios Christodoulou apporte une contribution étonnante : il montre qu'il existe des *singularités nues*, qui ne sont pas cachées dans des trous noirs ! Cependant, il montre aussi que ces solutions ne sont pas *génériques*, c'est-à-dire que des « petites » perturbations déclenchent la formation d'un trou noir pour les cacher. La conjecture de Penrose serait donc vraie *génériquement*. Pour obtenir ses résultats, Christodoulou fait l'hypothèse que l'espace-temps est à symétrie sphérique. Le cas général, bien plus compliqué, n'a pas encore été résolu : la recherche continue !

O. G.

Pour en savoir (un peu) plus

L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique. Roger Penrose, Interéditions, 1992.

Einstein et la relativité générale, une histoire singulière. Quentin Lazzarotto, film produit par l'Institut Henri Poincaré, 2015.

Maths et sports, quand les statistiques sont plus que des nombres

Christophe Ley

Professeur de statistique à l'Université de Gand

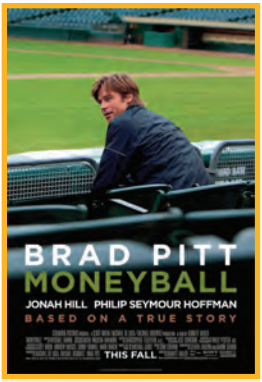
Président de la Société luxembourgeoise de statistique

Mathématiques et sports – à première vue, cette combinaison semble fort peu naturelle. D'accord, il faut savoir compter pour suivre les scores lors de matchs de football ou de tennis, et il faut savoir lire les chronomètres et additionner des temps pour savoir qui porte le maillot jaune lors du Tour de France. Mais nous sommes encore bien loin de « vraies » maths, et donc nous restons dans le schéma de pensées que maths et sports, ça ne va pas vraiment bien ensemble. Et en effet, pendant très longtemps les deux domaines ont vécu en parallèle, sans véritable intersection.

États-Unis, 2002 : le match de baseball qui a tout changé

La situation a complètement changé à la suite du succès inattendu de l'équipe de baseball californienne Oakland Athletics lors de la saison 2002. Dû à des contraintes monétaires, leur directeur général Billy Beane (né en 1962) avait adopté une toute nouvelle manière pour recruter des nouveaux joueurs : il s'était basé sur la *sabermétrie*, une approche statistique du baseball. Le mot tire son origine de l'acronyme SABR (pour Society for American Baseball Research). En d'autres termes, Beane utilisait des statistiques avancées et un raisonnement mathématique pour identifier quels joueurs sous-évalués étaient sur le marché et pourraient au mieux renforcer son équipe.

Cette approche scientifique a été couronnée de succès et a valu à Beane de faire l'objet du livre *Moneyball: The Art of Winning an Unfair Game* (Michael Lewis, W.W. Norton and Company Inc., 2003), livre qui aura servi par la suite comme base pour le film *Moneyball* (en français, *le Stratège*) qui est sorti en salles de cinéma en 2011 avec, comme acteur principal dans le rôle de Billy Beane, nul autre que Brad Pitt.



Le film a été six fois nominé aux Oscars 2012.

On peut imaginer la redondance qu'ont eue le livre et le film sur la mentalité des professionnels du milieu sportif. Depuis lors, la plupart des clubs cherchent à s'assurer les services de statisticiens ou analystes de données, de mathématiciens, d'informaticiens. Non seulement la manière de constituer une équipe, mais aussi les tactiques, les entraînements, la santé des joueurs, bref de nombreux aspects divers ont été repensés et basés sur une analyse de données scientifique. Le domaine des *sports analytics* est en pleine effervescence depuis plus d'une décennie ! C'est en particulier le cas au football.

Le football : un sport populaire aux règles faciles à comprendre

Lors d'un match de football, le résultat est clair : victoire, défaite ou match nul. Le résultat peut certes être contesté entre fans après le match, mais il se lit facilement et c'est là l'un des points forts de ce sport : tout le monde peut y jouer et comprendre les règles. Le classement des ligues nationales est aussi assez simple : une équipe reçoit trois points pour une victoire, un pour match nul, aucun pour une défaite, et les points sont additionnés. À la fin de la saison, l'équipe en première division nationale avec le plus de points se voit attribuer le titre de champion, les meilleures équipes peuvent jouer la Ligue des champions (respectivement la Ligue d'Europe en Europe), et les équipes terminant en derniers sont reléguées vers la seconde division nationale. Cet engrenage a toujours très bien fonctionné… jusque l'an dernier, où la pandémie de Covid-19 a marqué un stop net à toute activité sportive.

Les ligues ont dû s'arrêter de jouer, et on se demandait comment faire : peut-on continuer à un moment donné avec les ligues, ou faut-il déclarer la saison terminée ? Alors que des ligues comme la Bundesliga ou Premier League ont repris leur service, la France a déclaré le 28 avril 2020 que la saison était terminée, et qu'on allait considérer le classement au moment où la saison a dû être stoppée comme final (comme toutes les équipes n'avaient pas joué un nombre équivalent de matchs, les instances ont basé le classement sur le ratio points/matchs joués). Cette décision a suscité le courroux de plusieurs clubs, notamment l'Olympique lyonnais, privé d'une participation en coupe d'Europe.

De fait, il n'y avait pas de solution miracle toute prête, parce que personne n'avait imaginé pareil scénario. Du coup, des chercheurs de plusieurs pays européens ont entamé des recherches pour voir comment évaluer de manière plus correcte une saison stoppée prématurément.

Vers un classement alternatif : probabilités et lois de Poisson

Comment donc peut-on envisager un classement alternatif ? Explorons une approche, basée sur un classement probabiliste, c'est-à-dire un classement qui indique, pour chaque équipe, la probabilité d'arriver à chaque position en fin de saison. Pour y parvenir, il faut modéliser le résultat d'un match de football par une loi probabiliste.

Une *loi probabiliste* est une formule mathématique qui cherche à décrire le résultat d'un évènement aléatoire (pensez à la célèbre cloche de Gauss pour décrire bon nombre de phénomènes naturels, comme la distribution de la taille des gens). Un match de football est caractérisé par deux équipes adverses qui peuvent marquer chacune un certain nombre de buts pendant un intervalle de temps bien déterminé (quatre-vingt-dix minutes, plus arrêts de jeux). Un choix naturel pour décrire un phénomène aléatoire X qui peut se produire plusieurs fois sur un intervalle de temps déterminé est la *loi de Poisson*, avec comme formule $P(X=k)=\exp(-\lambda)\times\lambda^k/k!$, où l'entier positif k représente le résultat, le paramètre $\lambda\geq 0$ est la moyenne attendue de X et $k!=k\times(k-1)\times(k-2)\times\ldots\times 2\times 1$ est la factorielle de k. Une version légèrement plus élaborée, qui tient compte de l'interaction entre les deux équipes, permet de modéliser le résultat d'un match de football en disant que X_i est le nombre de buts marqués par l'équipe i dans le match. En assignant *une force de jeu* s_i à chaque équipe et en la reliant au paramètre λ_i, il devient possible d'estimer la force de jeu de toute équipe en déterminant, sur tous les matchs joués lors d'une saison, les paramètres s_i qui « collent le mieux » avec les résultats obtenus jusque-là.

Ainsi, à tout instant de la saison, on connaîtra les forces de chaque équipe, et ces paramètres tiennent compte des adversaires déjà rencontrés. Quand une saison doit être stoppée, il suffit alors de simuler un grand nombre de fois les matchs restants via la formule de Poisson et les forces s_i calculées au moment de l'arrêt de la saison, et on obtient ainsi pour chaque équipe le nombre de fois qu'elle est placée sur chaque position au classement final. Une simple division par le nombre de simulations donne alors les pourcentages mentionnés. En guise d'illustration, ci-dessous, la première figure contient le classement officiel de la Ligue 1 pour la saison 2019 – 2020, à comparer avec le classement probabiliste (seconde figure) obtenu pour la même saison.

	Team	Points	Win	Draw	Loss	Goals	Goals against	Goal difference	Matches	Points per match
1	PSG	68	22	2	3	75	24	51	27	2.52
2	Marseille	56	16	8	4	41	29	12	28	2.00
3	Rennes	50	15	5	8	38	24	14	28	1.79
4	Lille	49	15	4	9	35	27	8	28	1.75
5	Nice	41	11	8	9	41	38	3	28	1.46
6	Reims	41	10	11	7	26	21	5	28	1.46
7	Lyon	40	11	7	10	42	27	15	28	1.43
8	Montpellier	40	11	7	10	35	34	1	28	1.43
9	Monaco	40	11	7	10	44	44	0	28	1.43
10	Strasbourg	38	11	5	11	32	32	0	27	1.41
11	Angers	39	11	6	11	28	33	-5	28	1.39
12	Bordeaux	37	9	10	9	40	34	6	28	1.32
13	Nantes	37	11	4	13	28	31	-3	28	1.32
14	Brest	34	8	10	10	34	37	-3	28	1.21
15	Metz	34	8	10	10	27	35	-8	28	1.21
16	Dijon	30	7	9	12	27	37	-10	28	1.07
17	St. Etienne	30	8	6	14	29	45	-16	28	1.07
18	Nîmes	27	7	6	15	29	44	-15	28	0.96
19	Amiens	23	4	11	13	31	50	-19	28	0.82
20	Toulouse	13	3	4	21	22	58	-36	28	0.46

Le classement officiel de la Ligue 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
PSG	100																			
Marseille		77	18	5																
Rennes		12	41	36	8	2	1													
Lille		11	37	39	9	3	1													
Lyon			3	10	30	18	13	9	6	4	3	2	1							
Reims				3	12	15	15	13	12	10	8	6	4	2						
Montpellier				3	11	13	13	12	12	10	9	7	5	3	1					
Bordeaux				2	7	11	12	12	12	11	10	9	7	4	1					
Nice				1	7	10	12	12	12	12	11	9	7	4	1					
Strasbourg				1	6	9	11	11	12	12	11	10	9	5	2	1				
Monaco				1	4	7	9	10	12	12	13	12	10	6	3	1				
Nantes				1	4	7	8	10	11	12	12	12	11	7	3	1				
Angers					2	4	5	7	9	11	13	15	15	11	5	2	1			
Metz								1	1	2	4	7	11	21	22	16	10	4		
Brest								1	1	2	4	6	10	19	23	18	10	5	1	
Dijon											1	2	4	10	16	22	23	15	5	
St. Etienne											1	1	3	7	14	22	25	20	7	
Nîmes													1	3	6	12	22	36	18	
Amiens															1	3	8	20	66	2
Toulouse																			2	98

Le classement probabiliste obtenu (en pourcentages) après cent mille simulations. Les nombres sont arrondis au pourcent le plus proche, et les vides représentent des 0. Ainsi, le PSG a 100 % de chances de finir premier, Marseille a 0 % de chances de finir premier, 77 % de chances de finir deuxième, 18 % de chances de finir troisième, et ainsi de suite.

Une intelligence artificielle au retentissement médiatique inopiné

Cette modélisation mathématique d'un match de football n'est pas nouvelle. Comme la formule de Poisson se prête très bien à la prédiction de matchs de foot, il n'est pas surprenant qu'elle ait aussi été utilisée comme ingrédient essentiel d'une intelligence artificielle (IA) pour prédire la Coupe du monde 2018, que la France a remportée. Avec des collègues chercheurs, nous avons combiné cette formule avec des données économiques de chaque pays participant, des données sportives comme l'âge moyen des joueurs, le niveau des clubs pour qui ils jouent, le nombre de joueurs évoluant à l'étranger, ou encore des données sur le coach. Nous avons entraîné un nouveau type d'IA, à savoir une forêt aléatoire hybride, avec ces données sur base des Coupes du monde 2002 à 2014, et puis avons simulé cent mille fois la Coupe du monde 2018 pour obtenir nos prévisions.

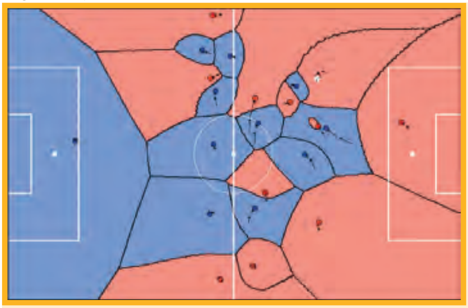
Le retentissement médiatique sur nos prédictions fut tout à fait inattendu et a montré à quel point les gens sont friands d'une prédiction mathématique d'un jeu réel comme le football. Alors que notre favori, l'Espagne, est sorti en huitièmes de finale (partiellement dû au licenciement de leur coach un jour avant le début de la compétition, fait que notre IA n'a plus pu prendre en compte faute de temps), nous avons terminé deuxièmes d'une compétition internationale de prédiction, soulignant la force de la combinaison maths et sports.

De nombreuses branches des mathématiques mobilisées pour le foot

Quand on parle de ligues nationales, il ne faut pas oublier qu'avant le début de saison, il fallait mettre sur pied le calendrier des matchs en tenant compte de multiples contraintes comme les coupes d'Europe, les coupes nationales ou encore la situation spéciale que deux équipes d'une même ville partagent le même stade (pensez au cas italien de San Siro, à Milan, qui héberge les grandes équipes du Milan AC et de l'Inter de Milan).

Même sans ces contraintes, il n'est pas facile de trouver un calendrier pour dix-huit équipes qui assure qu'en première moitié de saison chaque équipe rencontre chaque autre exactement une fois. Bien sûr, une fois que l'on dispose d'un modèle, c'est facile, mais essayez de vous prêter au jeu ! Le domaine des mathématiques qui traite ce genre de problèmes s'appelle la *recherche opérationnelle* ou l'*optimisation combinatoire*. L'exemple classique est le problème du voyageur de commerce, qui, pour une liste de lieux et des distances entre toute paire de lieux, doit trouver le chemin le plus court pour visiter chaque lieu une et une seule fois.

Trouver le meilleur calendrier d'une saison de football est un tel problème d'optimisation. Ce problème pose des défis aux chercheurs car le meilleur calendrier possible se définit également en termes d'équité : il faudrait éviter que les équipes aient trop de matchs à domicile de suite, et il faudrait également éviter *un effet de transfert*. Cet effet arrive quand par exemple une équipe rencontre systématiquement des adversaires qui, le tour précédent, ont dû souffrir une défaite cuisante contre une équipe du top comme par exemple le Paris Saint-Germain. Pareilles défaites peuvent démoraliser une équipe, qui jouera moins bien le match suivant. Un tel effet de transfert doit être partagé entre toutes les équipes, idéalement. Pour parvenir à tenir compte de toutes ces contraintes et constamment améliorer les calendriers des ligues, les chercheurs ont recours à la *théorie des graphes* afin de formuler en termes mathématiques le problème d'optimisation. Ci-dessous la figure droite propose un exemple de telle formulation (sans expliquer les concepts en détails, ici $x_{i,j,r}$ vaut 1 si les équipes i et j se rencontrent au tour r et 0 sinon, $c_{i,j}$ est l'effet transfert de l'équipe i sur j, T est le nombre total d'équipes et R le nombre total de tours à jouer).



$$\min \sum_{i\in T}\sum_{j\in T} c_{i,j}^2 \qquad (1)$$

Select an area to comment on

subject to

$$\begin{aligned}
& x_{i,i,r} = 0 && \forall i \in T, r \in R && (2)\\
& x_{i,j,r} = x_{j,i,r} && \forall i,j \in T, r \in R && (3)\\
& \sum_{r\in R} x_{i,j,r} = 1 && \forall i,j \in T, i \neq j && (4)\\
& \sum_{j\in T} x_{i,j,r} = 1 && \forall i \in T, r \in R && (5)\\
& x_{i,l,r} + x_{j,l,r+1} - 1 \leq c_{i,j,r} && \forall i,j,l \in T, r \in R \setminus \{|R|\} && (6)\\
& x_{i,l,|R|} + x_{j,l,1} - 1 \leq c_{i,j,|R|} && \forall i,j,l \in T && (7)\\
& \sum_{r\in R} c_{i,j,r} = c_{i,j} && \forall i,j \in T, i \neq j && (8)\\
& x_{i,j,r} \in \{0,1\} && \forall i,j \in T, r \in R && (9)\\
& c_{i,j,r} \in \{0,1\} && \forall i,j \in T, i \neq j, r \in R && (10)\\
& c_{i,j} \geq 0 && \forall i,j \in T, i \neq j && (11)
\end{aligned}$$

Extrait du chapitre
« Analysing Positional Data »

Extrait du chapitre
« Fairness trade-offs in Sports Timetabling »

de l'ouvrage *Science Meets Sports: When Statistics Are More Than Numbers,*
pensé et édité pour un public très large par Christophe Ley et Yves Dominicy.

Même les tactiques au football sont améliorées grâce aux maths. Ci-dessus la figure gauche indique, sur une phase de jeu, les zones de contrôle de chaque joueur, c'est-à-dire les endroits qui, selon sa position et sa vitesse, seront couverts par lui en premier. Ces zones sont obtenues en voyant le terrain sous l'angle d'un système de coordonnées et en enregistrant les positions (x, y) des joueurs, de l'arbitre et de la balle ainsi que des évènements comme les passes, les tirs… L'analyse de ces données de position se fait par des techniques d'apprentissage de machine et des concepts mathématiques comme les diagrammes de Voronoï et les triangulations de Delaunay.

C. L.

Pour en savoir (un peu) plus

Science Meets Sports: When Statistics Are More Than Numbers. Christophe Ley et Yves Dominicy, Cambridge Scholars Publishing, 2020.

« Le basket à l'épreuve des stats. » Conférence de Rémy Mahfouf au Mathematic Park, Institut Henri Poincaré, Paris, samedi 7 octobre 2017, disponible en ligne.

Connaissez-vous votre indice sprint-distance ?

Jean-Marie De Koninck

Professeur émérite au département de mathématiques
et de statistique de l'Université Laval (Québec)

Vous ne connaissez pas votre indice sprint-distance ? Pourtant vous en avez bien un ! Il s'agit d'un nombre situé entre 1,02 et 1,25, lequel représente la pente d'une droite liée à votre potentiel athlétique, que vous pratiquiez un sport ou pas. De quoi parle-t-on au juste et que viennent faire les maths dans tout cela ?

Athlète en action.

© *Gentrit Sylemani-UNSPLASH*

Marathon ou sprint, pas les mêmes efforts musculaires !

D'abord, un mot sur les muscles du corps humain. Les performances athlétiques de tout individu sont, entre autres, déterminées par la nature et la qualité de ses fibres musculaires. En effet, lorsque vous décidez de faire un effort, votre cerveau envoie un influx nerveux et commande à vos muscles de se contracter. Qu'il s'agisse de l'effort déployé pour soulever une charge ou de l'effort nécessaire pour courir un marathon, le succès de cet effort dépend amplement du type de fibres musculaires sollicité.
Il existe deux types de fibres musculaires dans le corps humain : ceux à contraction lente et ceux à contraction rapide. Si vous entreprenez une longue marche, vos fibres à contraction lente seront sollicitées car elles sont plus efficaces pour transporter l'oxygène nécessaire pour générer de l'énergie longtemps. Par contre, si vous devez effectuer un sprint pour attraper un bus, les fibres à contraction rapide seront mobilisées.

Dans le corps humain, la proportion de fibres à contraction lente par rapport à celle des fibres à contraction rapide varie d'une personne à l'autre (comme quoi, certains individus sont prédisposés pour exceller dans des épreuves d'endurance, alors que d'autres ont des atouts majeurs pour se démarquer dans des épreuves de sprint). Et vous, où vous situez-vous dans tout ça ?

Cerner ses aptitudes pour une catégorie d'activité athlétique

Comment savoir si vous avez des prédispositions pour des épreuves de sprint ou pour des épreuves de longue distance ? Il existe différentes méthodes pour le déterminer. Une méthode largement utilisée est celle du Canadien Charles Poliquin (1961 – 2018), un entraîneur de fitness réputé. Sa méthode consiste à prendre une charge équivalente à 85 % du poids maximal que vous pouvez soulever au développé couché, aussi appelé *bench press*, et à faire avec cette charge le plus grand nombre de répétitions possible. Selon le nombre de répétitions que vous allez réaliser, vous pourrez cerner de manière sommaire votre aptitude ou votre prédominance pour une certaine catégorie d'activité athlétique, soit selon le tableau qui suit.

Nombre de répétitions	Prédominance révélée
1 à 5 répétitions :	Dominante en fibres à contraction rapide = une prédisposition pour des épreuves de sprint
6 à 9 répétitions :	Combinaison de fibres à contraction rapide et à contraction lente = une prédisposition pour des épreuves de demi-fond
10 répétitions et plus :	Dominante en fibres à contraction lente = une prédisposition pour des épreuves d'endurance

La *méthode de Poliquin* nécessite tout de même un minimum d'équipement, auquel vous n'avez peut-être pas accès. Si tel est le cas, vous pourriez utiliser la *méthode du saut vertical*, datant de 1921 et attribuée à l'entraîneur américain Dudley Allen Sargent (1849–1924). Cette fois, il suffit d'avoir en main un ruban à mesurer. Vous vous placez debout, le long d'un mur, en allongeant votre bras droit (ou le gauche, si vous êtes gaucher) le plus haut possible. Avec un crayon, marquez la hauteur ainsi atteinte (*la portée debout*) ; elle dépassera de vingt à quarante centimètres votre taille. Ensuite, effectuez un saut (sans élan) pour aller toucher le mur au plus haut possible avec le bout des doigts. La présence d'un observateur pourrait aider, afin de mesurer la distance en centimètres de votre saut. La différence entre le point le plus haut que vous pouvez atteindre et votre portée debout est le *saut vertical*. Si vous arrivez à un saut vertical de plus de 70 cm, vous avez les qualités requises pour éventuellement devenir sprinteur ou sprinteuse, si vous ne l'êtes pas déjà ! En contrepartie, si vos pieds s'éloignent du sol de seulement vingt ou vingt-cinq centimètres, c'est que vous êtes probablement doué pour des épreuves d'endurance. Toute mesure située entre ces valeurs maximale et minimale signifie que vous êtes sans doute prédestiné à des épreuves de demi-fond.

Comme la constitution des fibres musculaires chez un individu est essentiellement héréditaire, il est inutile de tenter de transformer une personne douée pour le sprint en une personne qualifiée pour des épreuves d'endurance, et *vice versa*. En effet, une telle tentative serait contre-nature et probablement vouée à l'échec !

Alors, plutôt sprint ou marathon ?

L'indice ISD : patience, les maths arrivent !

Savez-vous nager ? Si tel est le cas, vous êtes sur le point de constater qu'il est très facile de déterminer votre prédominance en termes d'aptitude aux épreuves de sprint *versus* celles d'endurance. En effet, si vous vous adonnez au sport de la natation, même à titre d'amateur, il vous est possible de mesurer avec précision votre prévalence individuelle pour des épreuves de sprint ou pour des épreuves de distance. Pour ce faire, introduisons le concept d'*indice sprint–distance* (ISD). Posons-nous la question suivante : comment calculer l'ISD d'un nageur ou d'une nageuse en particulier ?

Enfin, un peu de maths ! Nous allons voir qu'il suffit de connaître les chronomètres de l'athlète pour ses deux meilleures épreuves (dans un même style). Avant cela, faisons d'abord la liste, pour une nageuse ou un nageur donné, des meilleurs temps t_i qu'elle ou il prend pour parcourir les différentes distances d_i, disons (d_i, t_i) pour $i = 1, 2\ldots k$. Il pourrait s'agir, par exemple, de ses meilleurs chronos en nage libre sur les distances $d_1 = 50$ (mètres), $d_2 = 100$, $d_3 = 200$ et $d_4 = 400$. En plaçant dans le plan cartésien chacun des points $(\log d_i, \log t_i)$, nous observons que la courbe correspondante $\log t = g(\log d)$ se comporte essentiellement comme une droite (c'est-à-dire que la courbe de $t = f(d)$ se comporte essentiellement comme une puissance de d). Autrement dit, $\log t = g(\log d) = \lambda \log d + b$ pour certains nombres réels positifs λ et b. C'est précisément ce nombre λ que l'on appelle l'*indice sprint–distance*, lequel varie d'un individu à l'autre. Mais comment calculer ce nombre λ ? Nous avons la relation $\log t = g(\log d) = \lambda \log d + b$, ce qui veut dire que, connaissant deux points (d_1, t_1) et (d_2, t_2), nous aurons :

$$\log t_1 = \lambda \log d_1 + b \text{ et } \log t_2 = \lambda \log d_2 + b.$$

En soustrayant la première égalité de la seconde, nous obtenons

$$\log t_2 - \log t_1 = \lambda(\log d_2 - \log d_1), \text{ de sorte que}$$

$$\lambda = \frac{\log(t_2 / t_1)}{\log(d_2 / d_1)}.$$

Prenons un exemple concret. Vous constatez que Paul excelle tout particulièrement dans les épreuves de distance et que ses meilleurs temps dans les épreuves de 800 m et 1 500 m en nage libre sont 7:56,70 (ce qui se lit « 7 minutes, 56,70 secondes ») et 15:01,53 respectivement. À l'aide de la formule obtenue, vous êtes en mesure de calculer son ISD et d'obtenir qu'il est égal à

$$\lambda = \frac{\log(901,53 / 476,7)}{\log(1500 / 800)} \simeq 1,014.$$

Est-ce que cette valeur de λ l'identifie vraiment comme un nageur d'endurance ? La réponse est « oui », puisque l'expérience démontre que l'ISD varie entre 1,01 et 1,25, et que plus on est proche de 1,01, plus on est doué pour des épreuves de fond. Voici d'ailleurs le tableau qui permet d'identifier la caractéristique prédominante d'un nageur ou d'une nageuse à partir de son ISD.

ISD (caractéristique prédominante)	
$1,00 \leq \lambda < 1,06$:	nageur de fond
$1,06 \leq \lambda < 1,09$:	nageur de fond et demi-fond
$1,09 \leq \lambda < 1,12$:	nageur de demi-fond
$1,12 \leq \lambda < 1,16$:	nageur de sprint et demi-fond
$1,16 \leq \lambda < 1,25$:	nageur de sprint

Des logarithmes aux droites du plan cartésien

Le calcul de l'ISD propre à une nageuse ou un nageur en particulier permet donc de classer cet athlète dans l'une ou l'autre des cinq catégories ci-dessus. Par exemple, sachant que les meilleurs temps de Samir sur 100 m et 200 m en nage papillon sont 55,75 et 2:02,60, respectivement, nous pouvons conclure que son ISD est égal à

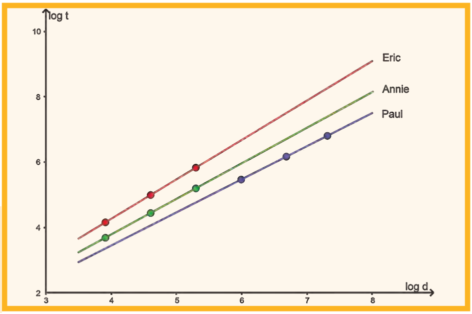
$$\lambda = \frac{\log(122,60 / 55,75)}{\log(200 / 100)} \simeq 1,137$$

ce qui, selon le tableau précédent, classe Samir dans la catégorie de nageurs de sprint et demi-fond.

Ainsi, à chacun des membres d'un club de natation, l'entraîneur peut associer une droite dans le plan cartésien. Chacune des droites sera de fait définie (de manière unique) par le logarithme du chrono de l'athlète sur une certaine distance et par son ISD savamment calculé. Voici d'ailleurs un graphique représentant les droites associées aux nageurs Éric, Annie et Paul (ce dernier étant celui mentionné précédemment).

Nageur à l'entraînement.

©Brian Matangelo- UNSPLASH



Valeurs comparatives de trois nageurs.

©J.-M. D. K., 2021

Prédire des performances, détecter de possibles contre-performances

On apprend dans les premiers cours de géométrie analytique qu'il suffit de connaître deux points d'une droite, disons P_1 et P_2, pour être en mesure de tracer cette droite. Autrement dit, en connaissant P_1 et P_2, on connaît automatiquement tous les autres points de cette droite. Ainsi, ayant obtenu l'ISD d'un ou d'une athlète, nous pouvons théoriquement prédire ses chronos sur toutes les autres épreuves dans ce même style de nage. En effet, en utilisant la formule définissant son ISD, et à partir de la valeur de λ et d'un chrono t_0 connu sur une distance d_0, nous savons prédire son temps t sur toute distance d :

$$t = t_0 \times \left(\frac{d}{d_0}\right)^{\lambda}.$$

Ainsi, supposons que l'ISD d'un nageur soit $\lambda = 1{,}16$ et que nous savons que son meilleur chrono au 50 m nage libre est de 25,0 secondes. Alors nous pouvons conclure que cet athlète devrait « normalement » pouvoir nager le 100 m libre en 55,86, puisque

$$t = 25{,}0 \times \left(\frac{100}{50}\right)^{1{,}16} = 25 \times 2^{1{,}16} \simeq 55{,}86,$$

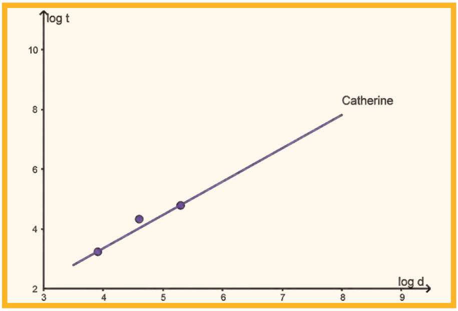
alors que son chrono sur 200 m devrait être aux alentours de 2:04,83, puisque

$$t = 25,0 \times \left(\frac{200}{50}\right)^{1,16} = 25 \times 4^{1,16} \simeq 124,83.$$

Revenons au cas de Samir. Nous pouvons déduire le chrono qu'il devrait pouvoir réaliser au 50 m papillon. En effet, avec $d_0 = 100$ et donc $t_0 = 55,75$, nous obtiendrons que son temps t sur la distance $d = 50$ sera

$$t = 55,75 \times \left(\frac{50}{100}\right)^{1,137} = 55,75 \times 2^{-1,137} \simeq 25,35.$$

Nous pouvons par ailleurs utiliser l'ISD d'un athlète pour identifier de possibles contre-performances. Pour illustrer ce point, prenons le temps de relever les meilleures performances de Catherine Plewinski (née en 1968), l'un des plus beaux fleurons de la natation française des années 1990, médaillée des Jeux olympiques de Séoul et de Barcelone. Ses meilleurs chronos étaient de 25,36, 55,44 et 1:59,88, respectivement aux 50 m, 100 m et 200 m nage libre. Dans le graphique suivant, nous constatons que son chrono aux 100 m n'est pas situé sur la droite qui joint les points $(\log d_1, \log t_1)$ et $(\log d_2, \log t_2)$, où $d_1 = 50, d_2 = 200, t_1 = 25,36$ et $d_2 = 119,88$, mais plutôt « légèrement au-dessus ». Or, nous pouvons observer qu'en se basant sur ses chronos de 50 et 200, elle aurait dû normalement nager légèrement plus vite sur 100 m. En effet, ses chronos sur 50 et 200 lui donnent un ISD de 1,12048, ce qui laisse supposer que son temps t sur la distance $d = 100$ aurait dû être



$$t = 55,75 \times \left(\frac{50}{100}\right)^{1,137} = 55,75 \times 2^{-1,137} \simeq 25,35.$$

Cela est trois dixièmes de seconde plus rapide que son temps réel ! En supposant que ses deux meilleures épreuves étaient les 50 et 200 m, elle aurait probablement été, en nageant dans des conditions optimales, capable de nager un peu plus vite sur 100 m. Somme toute, ceux qui s'adonnent à la pratique régulière de la natation pourront, en utilisant leur ISD, établir des objectifs raisonnables de performance à atteindre dans diverses épreuves de nage. Quant à l'entraîneur de natation aguerri et soucieux des progrès individuels des athlètes sous sa responsabilité, il ou elle pourra utiliser les ISD propres à chacun de ses athlètes pour mieux les connaître et ainsi arriver à repérer les améliorations possibles au tableau de leurs performances. Comme quoi, les maths sont partout et peuvent même aider chacun d'entre nous à mieux connaître son profil athlétique !

J.-M. D. K.

Croquer les maths, une question d'échelle

Sylvie Benzoni et Adrien Rossille

Mathématicienne à l'Université de Lyon
et directrice de l'Institut Henri Poincaré
Chargé de médiation scientifique à l'Institut Henri Poincaré

« Croquons les maths » ! Une formule qui peut être interprétée de deux façons : nous pouvons croquer les mathématiques en y goûtant, en s'en délectant, comme on croquerait une pomme, mais aussi croquer les mathématiques en les dessinant, en en faisant des croquis. Un double sens qui fait référence à la fois à la démarche scientifique et au plaisir qu'on peut, ou non, y éprouver. Ces deux sens du verbe « croquer » sont une invitation à parler avec gourmandise de concepts scientifiques. L'un d'eux, la notion d'échelle, nous semble tout indiqué. Si l'on croque les maths sur un dessin, il est souvent bienvenu – c'est aussi le cas pour la physique, la biologie, la géographie… – de faire figurer une échelle à côté de son croquis, sans quoi il serait difficile d'en comprendre le sens. De même pour le sens gastronomique du verbe croquer : l'échelle du gâteau aura toute son importance pour le plaisir à y goûter…

Le changement d'échelle : un simple mouvement de doigts ?

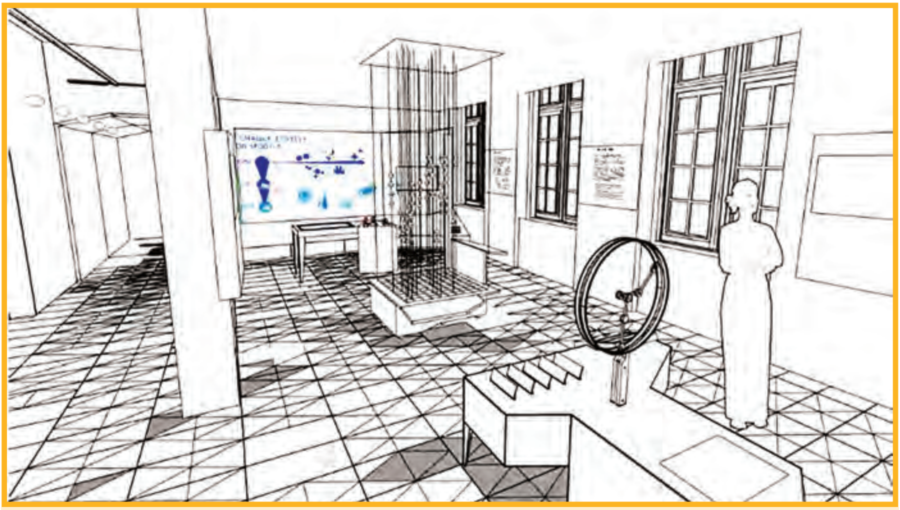
Réfléchir au sujet de l'échelle en sciences, c'est surtout réfléchir aux changements d'échelle. L'enjeu est de taille (c'est le cas de le dire), car l'étude d'un phénomène scientifique dépend de l'échelle à laquelle il se produit et où on l'observe. Si « zoomer » et « dézoomer » sont des gestes devenus instinctifs grâce aux interfaces graphiques telles que les tablettes et les *smartphones*, un changement d'échelle en sciences ne peut se faire par un simple mouvement de doigts. Comment transmettre à un large public cet aspect très important de la recherche scientifique ? Essayons de proposer des réponses avec deux éléments muséographiques de la Maison Poincaré, le futur espace de médiation scientifique porté par l'Institut Henri-Poincaré, qui ouvrira ses portes aux publics en 2022 dans le cinquième arrondissement de la capitale. Nos deux éléments sont situés dans deux espaces distincts du musée, de forme bien différente mais dont les contenus se répondent par rapport à la notion d'échelle.

Différents formalismes mathématiques pour différentes échelles

L'échelle est d'abord une indication de la taille du phénomène ou de l'objet d'observation : est-il petit ou grand, et en quel sens ? Sur une carte géographique ou un GPS, peut-être l'exemple quotidien auquel nous sommes le plus confrontés, l'échelle donne le rapport entre une distance « sur la carte » et une distance « dans la réalité ». De la même manière que des cartographes utiliseront pour une carte de randonnée une échelle très différente de celle d'une carte routière nationale, les chercheuses, chercheurs, ingénieures et ingénieurs en mathématiques, physique, chimie, biologie… choisissent l'échelle de leur croquis « la plus commode » pour visualiser leur sujet d'étude. Sur un croquis, même esquissé rapidement à la main, un centimètre de schéma peut représenter plusieurs millions de kilomètres si on dessine la mécanique céleste, ou seulement quelques micromètres si on représente des bactéries.
Toutefois, ce qui importe le plus souvent est moins la taille exacte des objets que leur taille relativement à leur environnement. Une galaxie n'est qu'un petit point sur un schéma d'un amas de galaxies, alors qu'une bactérie est gigantesque comparée aux molécules qu'elle contient. Le choix de l'échelle de modélisation ne se fait donc pas selon la taille brute de l'objet, mais selon sa taille relativement au système étudié ! La galaxie ou la bactérie peuvent toutes deux être une particule élémentaire d'un système beaucoup plus grand qu'elles, comme elles peuvent aussi être le système étudié lui-même. C'est ce que montre la *frise des échelles*, un grand panneau qui habillera un mur entier dans l'espace « Modéliser » de la Maison Poincaré. Le but de cette frise est de mettre en évidence l'universalité du formalisme mathématique, qui permet d'étudier d'une manière analogue des phénomènes à première vue très distincts : écoulement du sang dans une veine, trajet d'un polluant dans une canalisation, mouvement d'une foule de personnes ou même vol d'une nuée d'oiseaux. Ces quatre exemples concernent des échelles physiques très différentes, mais ont une caractéristique commune : il s'agit d'un ensemble de « particules » élémentaires – globules, molécules, humains, oiseaux – regroupées dans un milieu – le sang, l'eau, la foule, la nuée – dont l'une des particularités est de s'écouler de manière fluide. La manière d'étudier ces phénomènes dépend directement de l'échelle d'observation à laquelle on se place. La frise en explicite trois :

- L'échelle *microscopique*, à laquelle le mouvement de chaque particule élémentaire est déterminé par les équations de la mécanique du point (ou éventuellement du solide) ;
- L'échelle *mésoscopique*, à laquelle on étudie le mouvement d'un grand nombre de particules élémentaires par des lois statistiques ;

▪ L’échelle *macroscopique*, à laquelle l’ensemble du fluide est décrit comme une entité globale, régie par les lois de la mécanique des milieux continus (conservation de la masse ou de l’énergie par exemple).



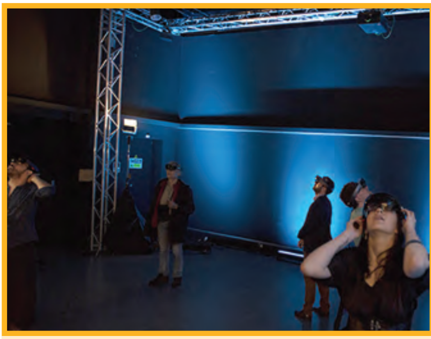
Vue de l’espace « Modéliser » de la Maison Poincaré, avec la frise des échelles en arrière-plan.
©*Agence Du&Ma*

À chacune de ces échelles correspondent des formalismes mathématiques différents : systèmes de particules en interaction pour l’échelle microscopique, les lois de physique statistique de Boltzmann à l’échelle mésoscopique, des équations aux dérivées partielles comme celles de Navier–Stokes à l’échelle macroscopique… On peut dans un premier temps se retrouver assommé par ces trois systèmes de pensée qui cohabitent pour l’étude d’un seul phénomène. Toutefois, ce que montre cette frise des échelles, c’est que ces trois méthodes de modélisation sont universelles, au sens où elles s’appliquent à des « fluides » constitués de « particules » de taille pouvant aller du dixième de nanomètre à des millions de kilomètres.

Cette grande frise est complétée par une vidéo qui invite les visiteurs et visiteuses de la Maison Poincaré à voir différemment des phénomènes dont notre perception est restreinte par nos habitudes. Découvrir les similarités entre l’écoulement de l’eau dans une canalisation et celui d’une foule de personnes dans une rue. Constater que le mouvement d’un oiseau dans sa nuée est proche de celui d’un globule rouge dans le sang. Se rendre compte qu’une image d’étoiles vues de loin ressemble à un nuage de grains de pollen…

Une expérience en réalité mixte pour visualiser les maths autrement

Une autre expérience présentée dans la Maison Poincaré, celle-ci bien plus technologique et immersive, a aussi comme intention de mettre en évidence des situations de changement d'échelle en sciences. Il s'agit d'Holo-Math, une « Visualiser » de la Maison Poincaré. Ce parcours invite ses participantes et participants à s'équiper de casques HoloLens pour passer « de l'autre côté du miroir », dans un univers inspiré d'*Alice au pays des merveilles* de Lewis Caroll, où les mathématiques se matérialisent dans tous les éléments graphiques du décor. La réalité mixte permet de voir un spectacle d'hologrammes qui s'ajoutent à notre réalité sans pour autant l'occulter, contrairement à la réalité virtuelle, qui immerge complètement dans un univers numérique et solitaire. Les casques HoloLens sont en effet des sortes de grosses lunettes avec écran transparent intégré qui permettent de voir tout l'environnement et de se déplacer librement dans tout l'espace disponible.



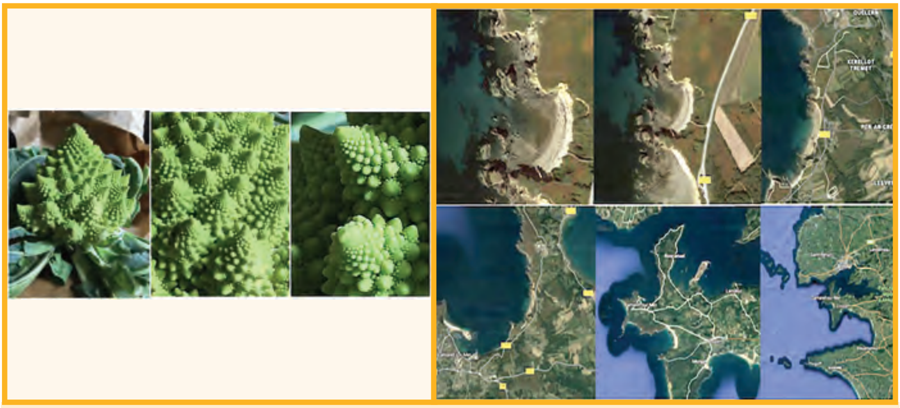
L'expérience Holo-Math vue de l'extérieur...

©*Camille Cier*

... et vue depuis les casques.

©*OneMore*

En s'affranchissant des contraintes du réel, cette nouvelle technologie permet de visualiser un univers dans lequel les mathématiques peuvent s'exprimer librement et devenir directement tangibles. L'immersion permet, entre autres, de changer librement d'échelle : ce qui était invisible dans la réalité vient alors nous envelopper visuellement et auditivement. C'est ainsi qu'Holo-Math permet à chaque participant et participante de zoomer vers l'infiniment petit, pour regarder sous différents angles le mouvement de petites particules dans l'air symbolisées par des grains de pollen. L'observation de leur trajectoire aléatoire, saccadée, en perpétuel mouvement sans qu'il y ait de déplacement global, amène à s'interroger sur la cause de ce mouvement : le chaos moléculaire. Immergés au milieu de l'agitation permanente des molécules de gaz qui composent l'air, les petits grains de pollen sont percutés en permanence par celles-ci. Comme il y a une très grande quantité de molécules, et que celles-ci vont très vite, chaque grain de pollen se retrouve sans cesse percuté, changeant de direction à chaque collision. Son mouvement peut être modélisé à l'échelle microscopique par une *marche aléatoire*. On finit par l'observer après une série de zooms successifs, lors d'un voyage par étapes vers le chaos moléculaire. Cette approche des changements d'échelle grâce à la réalité mixte fait aussi constater que, tant qu'on ne « zoome pas trop », l'allure de la trajectoire des grains de pollen ne dépend pas de l'échelle d'observation. Autrement dit, avant d'atteindre l'échelle microscopique à laquelle deviennent visibles les trajets en ligne droite réalisés par la marche aléatoire d'un grain de pollen, les zooms sur leur trajectoire ne permettent pas d'obtenir plus d'informations sur celle-ci. Comme si on entrait dans une boucle infinie. Ce constat surprenant est symptomatique d'une *fractale*, une forme identique à elle-même quelle que soit l'échelle à laquelle on l'observe. Est-ce un concept mystérieux inobservable dans la réalité ? Pas du tout, il suffit de cuisiner un chou romanesco ou de regarder une carte satellite de la Bretagne pour le percevoir. Du moins faut-il ne pas trop zoomer, comme pour la trajectoire des grains de pollen…



Un chou romanesco et une carte satellite de la Bretagne : quel que soit le niveau de zoom, jusqu'à une certaine limite, la forme générale de l'objet reste identique.

©*Héloïse Afman* ©*Google Earth / Google*

Quand le temps s'écoule en continu : le mouvement brownien

La trajectoire aléatoire et d'apparence fractale du grain de pollen suggère qu'on peut aussi la modéliser par un mouvement brownien. Le mouvement brownien est un processus qui décrit l'évolution d'une variable aléatoire en fonction du temps, comme l’exemple de la marche aléatoire. Mais à la différence de cette dernière, il le fait avec un temps qui s’écoule de manière continue. Dans la marche aléatoire, le temps avance « par sauts » : un mouvement correspond à un choc. Avec le mouvement brownien, le temps s’écoule de manière continue, mais la trajectoire devient plus difficile à appréhender : elle est fractale et correspond à une fonction continue mais dérivable nulle part. En d’autres termes, on peut en théorie la dessiner sans lever le crayon, mais la courbe ne peut admettre de tangente en aucun point, comme s’il y avait « un angle en chaque point ». Alors que la marche aléatoire était la modélisation du mouvement du grain de pollen la plus adaptée à l’échelle microscopique, la modélisation par le mouvement brownien est celle qui correspond le mieux à une échelle macroscopique.

Comme pour les modèles de la frise, la force du concept mathématique de mouvement brownien est son universalité : il peut modéliser le mouvement de petites particules dans l’air, mais aussi les cours de la bourse, le phénomène physique de percolation, la circulation des globules dans les vaisseaux sanguins, des techniques de gestion des risques dans le domaine de l’énergie ou encore le mouvement de chasse de certains animaux prédateurs.

Ainsi, les deux éléments muséographiques décrits ici permettent d’aborder la notion d’échelle de manière complémentaire. La frise permet d’embrasser d’un seul coup d’œil le fait que la notion d’échelle n’est pas qu’une question de taille. Les explications écrites et les illustrations graphiques sont pensées pour une visite en autonomie, mais l’expérience Holo-Math est quant à elle toujours accompagnée par un médiateur ou une médiatrice, par qui transite le discours scientifique, pendant que l’environnement numérique permet de percevoir physiquement un concept abstrait.

_S. B. & A. R._

Pour en savoir (un peu) plus

Holo-Math, visualiser les mathématiques autrement. Adrien Rossille, hors-série 77 de *Tangente*, 2021.

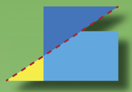
La parole à Jean Perrin : les courbes sans tangente. Clotilde Fermanian Kammerer, Stéphane Jaffard et Guillaume Saes, *Image des mathématiques*, 2020, disponible en ligne.

« L’oreille mathématique : Nicolas Curien. » Un épisode du podcast produit par Hélène Delye pour l’Institut Henri Poincaré, disponible en ligne.

Random Search Wired Into Animals May Help Them Hunt. Liam Drew, *Quanta Magazine*, 2020, disponible en ligne.

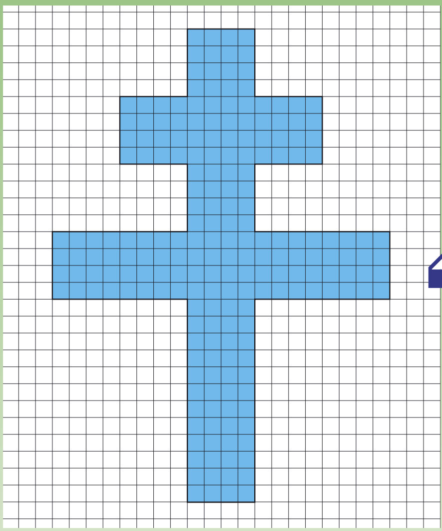
MORCEAUX CHOISIS DE GÉOMÉTRIE

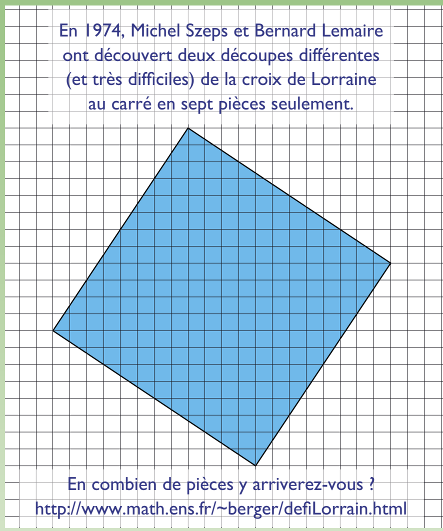
GEOMETRIC DISSECTIONS



Du plaisir géométrique *à partager*

Si deux polygones ont même aire, on peut découper l'un en un nombre fini de plus petits polygones… qui s'emboîtent exactement pour former l'autre, tel un puzzle.
C'est le domaine des *découpes géométriques*.
Des défis logiques vous seront proposés sur http://CultureMath.ENS.fr/decoupes





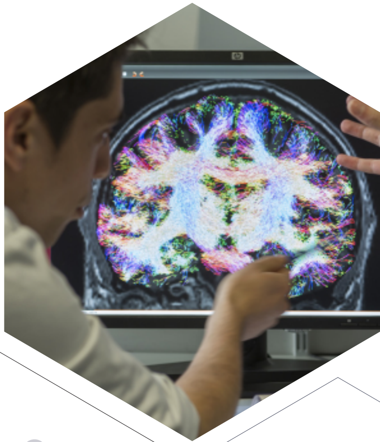
Une entrée privilégiée *dans les mathématiques*, de 10 à 110 ans

Créatif : réalisez d'ingénieuses découpes en un nombre minimal de pièces !
Ludique : un papier, un crayon ou un écran, c'est parti…
Pédagogique : chaque défi est un puzzle à résoudre !
Collaboratif : contribuez à réaliser un catalogue inédit de découpes.
Scientifique : un domaine de la géométrie peu exploré ; devenez rapidement expert.e !
Méthodologique : tâtonner, raisonner et… maîtriser les techniques.
Interactif : commentez les solutions dans un forum, proposez vos découpes !
Accessible : totalement gratuit et ouvert à toutes et à tous.
Convivial : un logiciel développé par Maxime Berger, Clément Cartier, Frédéric Jaëck, Bernard Lemaire, Édouard Thomas.
Périodique : des défis proposés régulièrement par Bernard Lemaire, inventeur de nombreuses découpes.

En lien avec Fatrazie (www.fatrazie.com), Kafemath (www.kafemath.fr), Playmaths (https://playmaths.blog4ever.com) et Mathcurve (www.mathcurve.com).

ENS | PSL

Centre de recherche Inria de Paris en bref



600
personnes dont
520 scientifiques
36 équipes
de recherche

22 bourses ERC depuis 2009

1 à **2** nouvelles start-up par an

En partenariat avec :

le CNRS, l'EHESS, l'ENPC, l'ENS, Inserm, Mines ParisTech, Paris Dauphine, Sorbonne Université, Université de Paris, Université Paris-Est Marne-la-Vallée.

Membre de :

PSL RESEARCH UNIVERSITY PARIS

ALLIANCE SORBONNE UNIVERSITÉ

Inria.fr/Centre/Paris

@inria_paris

DÉCOUVRIR LES MATHÉMATIQUES AUTREMENT !

Animath

Association pour l'animation mathématique

WWW.ANIMATH.FR

Cette brochure a été réalisée par le
Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de
Marie José Pestel
et d'Édouard Thomas qui en a assuré la relecture.

Imprimée grâce à
Inria et Animath

Elle réunit les signatures de

Édouard Thomas
Quentin Lazzarotto
Denis Moreau
Mickaël Launay
Denise Demaret - Pranville
Jacky Cresson
Michel Criton
Guillaume Reuiller
Joëlle Lamon
Robin Jamet
Antoine Houlou - Garcia
Hervé Lehning et Fayçal Ziraoui
André Deledicq
Olivier Graf
Christophe Ley
Jean - Marie De Koninck
Sylvie Benzoni et Adrien Rossille
Jean-Baptiste Aubin et Olivier Druet

« Dans cette édition 2021 de la brochure Maths Express, nos prestigieux auteurs vous proposent de croquer les maths et de partager leur appétit pour cette discipline que l'on pense trop souvent pouvoir ignorer ! Un esprit curieux ne doit – il pas toujours goûter ? »

Nous remercions particulièrement tous nos contributeurs spécialistes qui au péril de leur temps ont bien voulu éclairer des pans de l'aventure mathématique. Nous savons que nous leur avons demandé un exercice de très haute voltige, dont ils se sont tous acquittés avec brio, compréhension et gentillesse.

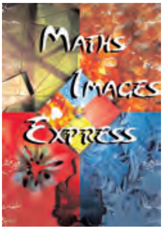
Visuel de couverture : Cynthia Filipe
Illustration chapitres Valentin Afanassiev : « *ISeptaccord* » – Métamorphose des accords. **www.afanasieff.ru**
Réalisation : Patrick Arrivetz
Impression : Presses de CIA GRAPHIC – 03 86 90 96 10

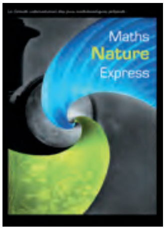
Mai 2021

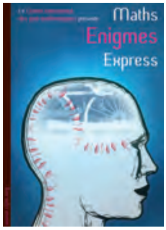
Maths Express

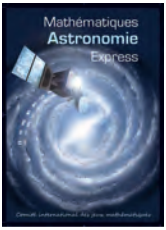
Une collection CIJM

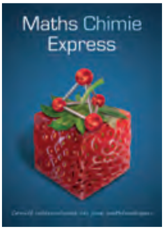
https://www.cijm.org/accueil/accueil-cijm

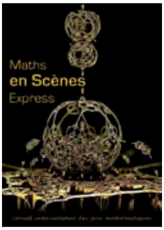


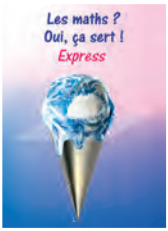


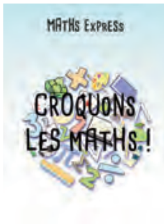












CIJM
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

www.cijm.org